Tekniikan matematiikka

KONE- JA TUOTANTOTEKNIIKKA

Huhtahaara, Perälä, Remes, Saalasti

Tiedustelut

Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy
1. painos 2017

ISBN 978-952-63-3738-8

Toimitus: Niko Haarala ja Leena Koskua
Kansi ja ulkoasu: Anna Mattsson / SuomiDesign
Taitto: Hilkka Hyvärinen / hipateos
Kuvitus: Nea Saastamoinen

© Valtteri Huhtahaara, Timo Perälä, Satu Remes, Taina Saalasti ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot

Tämä teos on yhdistetty työ- ja oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Työkirjasivujen tai niiden osien valokopiointi, skannaaminen tai muu digitaalinen kopiointi on kokonaan kielletty.

Tekstisivujen tai niiden osien valokopiointi, skannaaminen tai muu digitaalinen kopiointi tai käyttö edellyttää oikeudenomistajan luvan. Kopiosto ry myöntää teosten osittaiseen kopiointiin lupia. Tarkistakaa, mitkä valokopiointi- ja digiluvat ovat kohdallanne voimassa. Lisätietoja luvista www.kopiosto.fi.

Teoksen tai sen osan muuntelu on kielletty.

Käyttäjälle

Pitelet käsissäsi erityisesti kone- ja tuotantotekniikan aloille suunnattua matematiikan oppikirjaa. Kirjassa keskitytään laskuihin, joita työntekijä näillä aloilla tarvitsee. Teos on saatavilla myös digikirjana.

Kirjan suunnittelun ja tekemisen lähtökohtana oli ajatus saada aikaan helppotajuinen matematiikan oppikirja, joka on suunnattu nimenomaan kone- ja tuotantotekniikan opiskelijoille. Tavoitteena on ollut kirjoittaa mielenkiintoinen ja käytännönläheinen teos, josta saa apuja myös arkisten matemaattisten ongelmien ratkaisuun.

Esimerkiksi metalliteollisuudessa matematiikkaa tarvitaan monissa tilanteissa. Valmistettavista kappaleista laaditaan tarkat piirustukset oikeine mittoineen ja yksiköineen. Lisäksi lasketaan muun muassa lopputuotteiden painoja, tilavuuksia ja hintoja. Myös valmistusajat pitää osata laskea valmistuksen suunnittelua varten. On siten ensiarvoisen tärkeää miettiä asioita teoriassa ennen niiden soveltamista käytäntöön.

Kirjan tehtävät on jaoteltu vaikeustasoltaan kolmeen eri luokkaan (T1–H2–K3). Luokittelussa käytetään lamppusymbolia 💡. Kirjassa on runsaasti perustason tehtäviä, jotka vahvistavat laskurutiinia. Havainnollistavat esimerkit mahdollistavat myös itseopiskelun. Kirjaan on laadittu myös paljon arviointitehtäviä, sillä oikean suuruusluokan arviointi on elämän kannalta tärkeimpiä matematiikan taitoja.

Kirja sisältää ammatillisen koulutuksen uusimpien tutkinnon perusteiden pakollisten tutkinnon osien lisäksi myös valinnaista materiaalia. Luvut 6 ja 7 tarjoavat kattavan paketin talousmatematiikasta ja tilastoista.

Kiitämme kaikkia, jotka ovat antaneet palautetta ja kehitysehdotuksia kirjaa varten. Toivotamme antoisia hetkiä matematiikan opiskelun parissa.

Huhtikuussa 2017

Valtteri Huhtahaara *Timo Perälä* *Satu Remes* *Taina Saalasti*

Sisällys

1 Matematiikan perusteita 5

Kymmenjärjestelmä 6
Peruslaskutoimitukset 11
Päässälaskutekniikat 17
Pyöristäminen ja vastauksen tarkkuus 22
Murtoluvut 26
Potenssit ja juuret 37

2 Kerrannaisyksiköt 47

Kilosta milleihin 48
Pikosta teraan 50
Pituus 55
Massa 57
Vetomitat 61
Pinta-alan yksiköt 64
Tilavuuden yksiköt 69
Yksiköiden yhdistäminen ja tuuma 72
Ajan yksiköt 77

3 Prosentit 83

Prosentin käsite 84
Prosenttilaskutyypit 89
Promille 101
Prosenttiyksikkö 102

4 Geometria ja mittakaava 107

Mittakaava 108
Pinta-alat 112
Kolmio 117
Pythagoraan lause 122
Ympyrä 127
Avaruusgeometria 133
Lieriön tilavuus ja pinta-ala 138
Kartion tilavuus ja pinta-ala 143
Pallon tilavuus ja pinta-ala 150
Kulmien suuruudet 153
Trigonometria 155
Kosini ja sini 157

5 Yhtälöt 161

Kaavaan sijoittaminen 162
Tekijämuotoinen yhtälö ja verranto 163
Suoraan ja kääntäen verrannollisuus 169
Muut ensimmäisen asteen yhtälöt 176
Toisen asteen yhtälö 178
Kolmannen asteen yhtälö 182
Funktiot ja kuvaajat 184

6 Talousmatematiikka 189

Palkkatulojen verotus 190
Arvonlisävero 197
Korot ja lainat 202
Indeksilaskenta 206

7 Tilastot 211

Mitä tilastot ovat? 212
Kuvaajatyypit 213
Tilastolliset tunnusluvut 222
Frekvenssitaulukot 230
Oman tilastotutkimuksen tekeminen 237

1

Matematiikan perusteita

- Kymmenjärjestelmä
- Peruslaskutoimitukset
- Päässälaskutekniikat
- Pyöristäminen ja vastauksen tarkkuus
- Murtoluvut
- Potenssit ja juuret

Kymmenjärjestelmä

Käytössä on kymmenen eri **numeroa**: 0, 1, 2,..., 8 ja 9. Näitä numeroita yhdistelemällä ja **desimaalipilkun** paikkaa vaihtamalla saadaan esitetyksi mikä tahansa **luku**.

Suomen valtion velka kesällä 2015 oli noin yhdeksänkymmentäseitsemänmiljardia kaksisataamiljoonaa euroa. Osaatko kirjoittaa luvun paperille? Mikä on sinun osuutesi velasta?

9	7	4	8	4	4	8	0	4	1	9	,	1	0	4	7	7
Sadat miljardit	Miljardit (giga)	Sadat miljoonat	Kymmenet miljoonat	Miljoonat (mega)	Sadat tuhannet	Kymmenet tuhannet	Tuhannet (kilo)	Sadat (hehto)	Kymmenet (deka)	Ykköset		Kymmenesosat (desi)	Sadasosat (sentti)	Tuhannesosat (milli)	Kymmenestuhannesosat	Sadastuhannesosat

Esimerkki 1

Miten sanot ääneen seuraavat luvut:

a) 14 500 millimetriä b) 12 000 307 euroa c) 14,94 sekuntia

Ratkaisu:

a) neljätoistatuhatta viisisataa millimetriä

b) kaksitoistamiljoonaa kolmesataaseitsemän euroa

c) neljätoista sekuntia ja yhdeksänkymmentäneljä sekunnin sadasosaa
(tai neljätoista pilkku yhdeksänkymmentäneljä sekuntia)

Esimerkki 2

Kirjoita seuraavat luvut numeroiden avulla:

a) viisisataatuhatta neljäsataa euroa ja viisikymmentäyhdeksän senttiä

b) kolmetoista senttimetriä ja kolmekymmentäviisi senttimetrin sadasosaa

c) neljä sekuntia ja kuusikymmentäkolme sekunnin tuhannesosaa.

Ratkaisu:

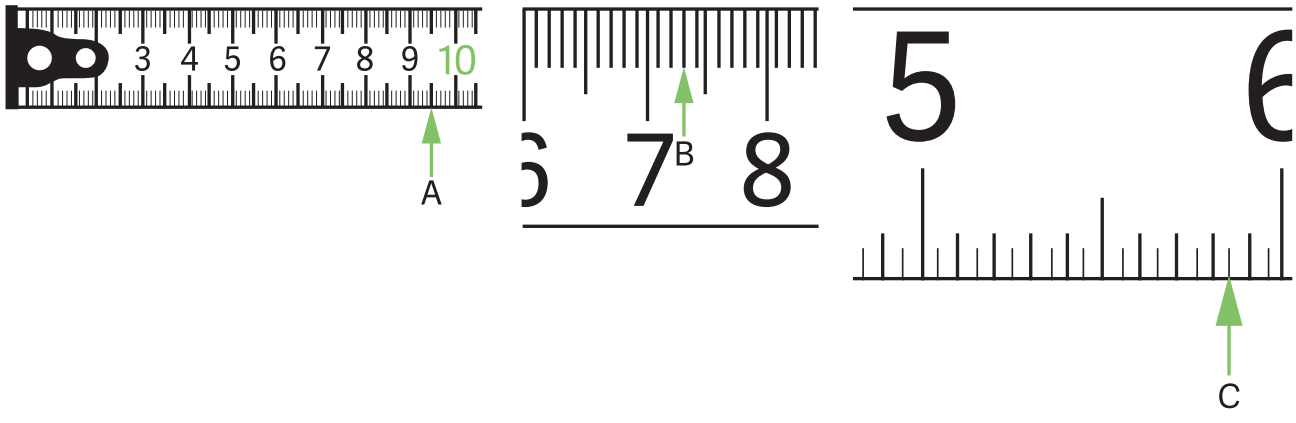
a) 500 400,59 €

b) 13,35 cm

c) 4,063 s

Esimerkki 3

Ohessa on kuvia rullamitasta. Mitä lukua nuolet osoittavat? Anna vastaus desimaaliluku na senttimetreinä. Anna luku niin tarkasti kuin pystyt.



Ratkaisu:

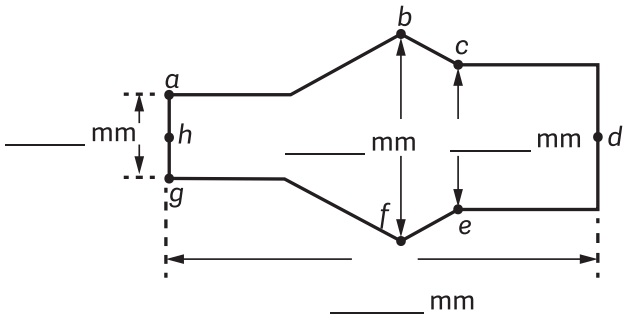
a) Nuoli A osoittaa lukujen 9 ja 10 puoleen väliin. Lukema on siis 9,5 cm.

b) Lukujen 7 ja 8 väli on jaettu kymmeneen yhtä suureen osaan. Yhden osan pituus on siis 0,1, joten nuoli osoittaa arvoa 7,3 cm.

c) Lukujen 5 ja 6 väli on jaettu kymmeneen yhtä suureen osaan, joista jokainen osa on jaettu vielä kahteen osaan. Tosin sanoen väli on jaettu ensin 0,1 cm:n pituisiin väleihin ja sitten 0,05 cm:n pituisiin väleihin. Lukema on siten 5,85.

Tehtäviä

1. Olet työparisi Inarin kanssa mittaamassa eräässä koneessa olevan osan mittoja. Koneen osan kuva on esitetty alla. Kirjoita viivoille, mitä Inari sanoo.



"Pisteiden *a* ja *g* välimatka on kaksikymmentäviisi millimetriä."

"Pisteiden *b* ja *f* välimatka on seitsemäntoista ja puoli millimetriä pidempi kuin pisteiden *a* ja *g*."

"Pisteiden *c* ja *e* välimatka on kahdeksan millimetriä pienempi kuin pisteiden *b* ja *f*."

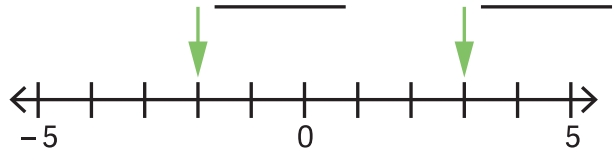
"Pisteiden *d* ja *h* etäisyys toisistaan on kaksikymmentäkaksi ja puoli senttimetriä."

2. Mikä luvun 123 456,789 numeroista edustaa

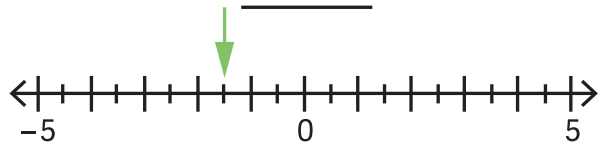
a) satoja _____ b) sadasosia _____ c) kymmeniä tuhansia? _____

3.

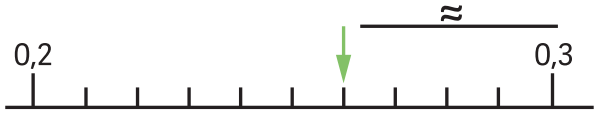
a) Kirjoita nuolen viereen, mitä lukua nuolet osoittavat. Anna vastaukset ykkösten tarkkuudella.



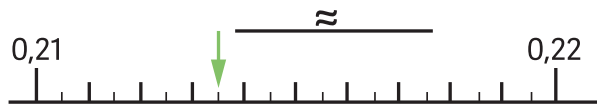
b) Kirjoita nuolen viereen, mitä lukua nuoli osoittaa. Anna vastaus kymmenesosien tarkkuudella.



c) Kirjoita lukusuorien nuolten viereen, mitä lukua nuolet osoittavat. Anna vastaus sadasosien tarkkuudella. Pyöristä tulos lisäksi kymmenesosien tarkkuuteen.



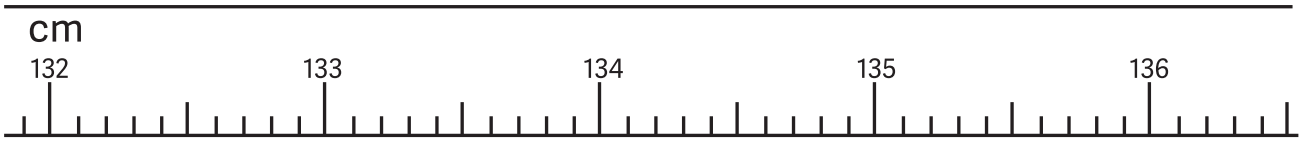
d) Kirjoita nuolen viereen, mitä lukua nuoli osoittaa. Anna vastaus kymmenestuhannesosien tarkkuudella ja pyöristä tulos tuhannesosien tarkkuuteen.



4. Miten sanot ääneen seuraavat luvut ilman, että käytät sanaa "pilkku".
(*Vihje: Katso mallia sivun 6 esimerkistä 1.*)

a) 132 000 500 000 € b) 11,025 s

5. Nadja mittasi ikkuna-aukon leveyden rullamitalla. Hän ilmoitti leveyden olevan 134,1 cm ± 3 mm. Merkitse alla olevalta lukusuoralta Nadjan ilmoittama väli.



6. Marjatta mittasi sähkökiukaan viemän virran. Yleismittari ilmoitti virraksi 8,3 A. Mittarissa oli merkintä:"± 0,05 A".

a) Onko mahdollista, että kiuas vei virtaa 8,285 A? Perustele vastauksesi.

b) Onko mahdollista, että kiuas vei virtaa 8,365 A? Perustele vastauksesi.

7. Erään yrityksen liikevoitoksi ilmoitettiin uutisissa neljäkymmentämiljoonaa kuusisataatuhatta euroa. Yrityksellä on tuhat työntekijää. Laske ilman laskinta, kuinka monta euroa liikevoitto on yhtä työntekijää kohden.

8. Sijoita seuraavat luvut laatikoihin (*Huom. On mahdollista, ettei luku sovi mihinkään laatikkoon. Osa laatikoista voi jäädä tyhjiksi.)*

a) kuusi kokonaista ja seitsemän sadasosaa b) 2 miljardia c) –7,08762 d) 2 533 e) –7,079999 f) –7,1 g) kymmenen kokonaista ja neljä sadasosaa h) 210 miljoonaa i) 0,00009 j) neljätoista sadasosaa.

< 800 000	< 0,001	suurempi kuin tuhat	< –7,08	pienempi kuin 8 mutta suurempi kuin 7
= 10 · 1,4	= 100 · 0,607	suurin luku	pienin luku	–8 < luku < 8

9. Laske päässä seuraavat laskutoimitukset:

a) 5 · 10 = _____ b) 50 · 10 = _____ c) 10 · 0,2 = _____

d) 1 000 · 5,5 = _____ e) 5 : 10 = _____ f) 72,5 : 100 = _____

g) 2 : 10 = _____ h) 10 : 2 = _____ i) 0,005 : 100 = _____

j) 600 : 300= _____ k) 60 : 30= _____ l) 6 : 3 = _____

m) 0,6 : 0,3 = _____ n) 0,6 : 3 = _____ o) 70 : 2 = _____

p) 70 : 2 : 10 = _____ q) 70 : 20 = _____ r) 90 : 20 = _____

s) 0,3 · 10 = _____ t) 3 · 10 000 = _____ u) 8 : 10 = _____

v) 700 : 1 000 = _____ w) 6 · 5 · 10 = _____ x) 4,3 · 2 = _____

Peruslaskutoimitukset

Tässä luvussa kerrataan peruslaskutoimitukset: yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku. Muistellaan aluksi, miten näitä laskutoimituksia tehdään allekkain ja mikä on laskujärjestys.

Yhteen- ja vähennyslaskut

Kun lasketaan yhteen- ja vähennyslaskuja allekkain, on muistettava merkitä vastaavat lukuyksiköt allekkain: ykköset allekkain, kymmenet allekkain jne. Desimaaliluvuilla laskettaessa pilkut tulevat allekkain.

Esimerkki 4

Laske allekkain 4,54 + 7,8.

```
  1 1
    4,5 4
+   7,8
  1 2,3 4
```

Jos allekkain olevien lukujen summa ylittää kymmenen, merkitään kymmenet muistiin.

Laske allekkain 5,49 – 1,8.

```
    4 14
    5,4 9
-   1,8
    3,6 9
```

Jos lukujen erotus on alle nollan, "lainataan" yksi kymmen viereiseltä luvulta.

Muistathan, että yhteenlaskun tulos on nimeltään **summa**.

Muistathan, että vähennyslaskun tulos on nimeltään **erotus**.

Kertolasku

Kun lasketaan kertolaskua allekkain, ykkösten, kymmenten jne. ei tarvitse olla allekkain. Kertolaskua laskettaessa ei ole väliä, kummin päin luvut ovat.

Esimerkki 5

Laske 4,58 · 1,3

Ratkaisu:

```
    4,5 8
  ·   1,3
  1 3 7 4     2 1
+ 4 5 8
  5,9 5 4
```

Kertolaskun kymmenet merkitään muistiin ja lisätään seuraavaan tuloon.

Kun kerrotaan toisella numerolla, jätetään yksi ruutu tyhjäksi tai kirjoitetaan sen tilalle nolla.

Vastauksen pilkun paikka määräytyy kerrottavista luvuista: lukujen 4,58 ja 1,3 pilkun jälkeen on yhteensä kolme numeroa, joten vastauksessakin on pilkun jälkeen kolme numeroa. Muistathan, että kertolaskun tulos on nimeltään **tulo**.

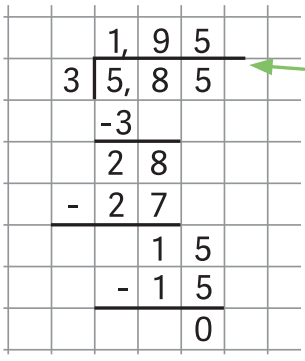
Jakolasku

Jakolaskua voidaan merkitä kahdella tavalla: jaettava : jakaja tai $\frac{\text{jaettava}}{\text{jakaja}}$

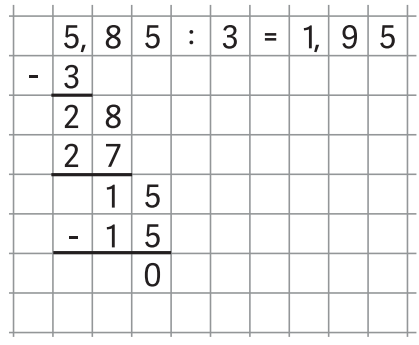
Jakolaskun tulos on nimeltään **osamäärä**.

Esimerkki 6

Laske 5,85 : 3 jakokulmassa. Huomaa, että jakolaskun voi tehdä kahdella tavalla allekkain.



1. Jaa.
2. Kerro.
3. Vähennä.
4. Pudota alas.



Laskujärjestys

Laskujärjestys pätee kaikille luvuille: kokonaisluvuille, desimaaliluvuille ja murtoluvuille.

1. sulut, alkaen sisimmistä
2. potenssit ja juuret
3. kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle
4. yhteen- ja vähennyslaskut vasemmalta oikealle

Esimerkki 7

a) Laske $[3 + (8 - 3)] \cdot 5 + 2$

Ratkaisu:

$[3 + (8 - 3)] \cdot 5 + 2$

$= (3 + 5) \cdot 5 + 2$

$= 8 \cdot 5 + 2$

$= 40 + 2$

$= 42$

b) Laske $\frac{6 + 7 \cdot 2}{2 \cdot 2}$

Ratkaisu:

Lauseke voidaan kirjoittaa myös näin:

$(6 + 7 \cdot 2) : (2 \cdot 2)$

$= (6 + 14) : 4$

$= 20 : 4$

$= 5$

Tehtäviä

1. Laske allekkain.

a) 149 + 284

b) 45,9 + 28,2

c) 345,89 + 27,1

d) 459 – 328

e) 234 – 76

f) 45,89 – 8,3

2. Laske ilman laskinta lukujen

a) 35 ja 18 summa _____

b) 29 ja 17 erotus _____

c) 3 ja 8 tulo _____

d) 24 ja 3 osamäärä. _____

3. Laske ilman laskinta.

a) $3 \cdot (5 - 3) + 4 =$ _____

b) $3 \cdot 5 - 3 + 4 =$ _____

c) $3 \cdot 5 - (3 + 4) =$ _____

4. Laske allekkain.

a) 46 · 7

b) 24 · 16

c) 148 · 23

d) 345 · 12,9

e) 3,08 · 1,3

f) 324 : 3

5. Laske ilman laskinta.

a) 15 : 3 + 2 = _____

b) 18 : 3 · 2 = _____

c) 5 · (2 + 16 : 2) = _____

6. Laske ilman laskinta.

a) $\frac{2+4}{3}$ = _____

b) $\frac{18}{2 \cdot 3}$ = _____

c) 3 · 8 : 2 · = _____

7. Laske laskimella.

a) $\frac{15{,}8 + 27{,}4}{3{,}6}$ = _____

b) 3 · (5,8 + 12,5) = _____

c) 4 + [5 – (2,8 + 1,3) · 2] = _____

8. Hammaspyörä pyörii 500 kierrosta minuutissa. Kuinka monta kierrosta hammaspyörä tekee 3 minuutissa?

9. 3 500 mm pitkä metalliputki katkaistaan 150 mm:n pituisiin pätkiin. Kuinka monta pätkää metalliputkesta saadaan?

10. Pakkaus, jonka hinta on 29,50 €, sisältää 6 kpl liitinpultteja. Kuinka paljon yksi liitinpultti maksaa?

11. Hitsauspuikkoja myydään 1 600 g:n pakkauksissa. Matti laski pakkauksessa olevien hitsauspuikkojen määrän ja sai tulokseksi 208 puikkoa. Kuinka paljon yksi puikko painaa?

12. Laske allekkain.

a) 455 : 5

b) 144 : 3

c) 821 : 3

13. Laske ilman laskinta

a) lukujen 4 ja 14 summan ja luvun 2 tulo

b) lukujen 3 ja 5 tulon ja luvun 4 erotus

c) lukujen 24 ja 4 osamäärän ja lukujen 3 ja 2 tulon erotus

d) lukujen 12 ja 14 summan ja lukujen 2 ja 5 tulon osamäärä.

14. Laske ilman laskinta.

a) $3 \cdot (8 : 2) \cdot 2 =$

b) $2 + \left[8 : (2 + 2)\right] =$

c) $3 \cdot 5\left[2 + 4 \cdot (5 - 3)\right] =$

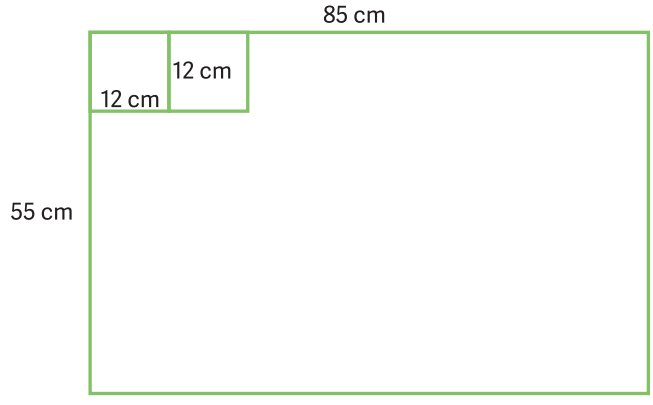
15. Hitsauslanka maksaa Rautakauppa Oy:ssä 25 euroa, ja pakkaus sisältää 5 kg lankaa. Pertin Rauta Oy:ssä saman hitsauslangan hinta on 45 euroa, ja siellä pakkauksessa on 7,5 kg lankaa.

a) Kummassa näistä kaupoista hitsauslangan kilohinta on halvempi?

b) Jos asiakas tarvitsee hitsauslankaa 15 kg, kuinka paljon hän säästää ostaessaan edullisemmasta kaupasta verrattuna siihen, että hän ostaisi langan kalliimmasta kaupasta?

16. Täydestä kaasupullosta saadaan hitsaukseen tarvittavaa suojakaasua 12 000 litraa. Kuinka kauan kaasua riittää, jos kaasupullossa on jäljellä puolet ja tiedetään, että kaasun virtausmäärä on 15 l/min?

17. Metallilevystä, jonka mitat ovat 550 mm x 850 mm, leikataan neliön muotoisia levyjä, joiden mitat ovat 120 mm x 120 mm. Kuinka monta neliön muotoista levyä metallilevystä saadaan leikattua?



18. CNC-sorvin päivävuokra on 450 €. Sorvi kuluttaa sähköä 22 kWh tunnissa ja on päivän aikana käytössä 7 tuntia. Sähkön hinta on 6,96 snt/h. Mitkä ovat sorvin käyttökustannukset yhdeltä päivältä?

Päässälaskutekniikat

Työelämässä tulee usein eteen tilanteita, joissa pitää laskea jokin yksinkertainen laskutoimitus päässä. Voit toki kaivaa taskustasi matkapuhelimen ja laskea sillä, mutta tyylikkäämpää ja nopeampaa on hoitaa asia päässälaskulla.

Esimerkki 8

Kymmenellä kerrottaessa pilkku siirtyy yhden pykälän verran oikealle. Vastaavasti sadalla kerrottaessa pilkku siirtyy kahden pykälän verran, tuhannella kerrottaessa kolmen pykälän verran jne. Oivalsitko?

a) $10 \cdot 17 = 170$

b) $10 \cdot 0{,}56 = 5{,}6$

c) $1{,}453 \cdot 100 = 145{,}3$

d) $165 \cdot 10\,000 = 1\,650\,000$

Esimerkki 9

Kymmenellä jaettaessa pilkku siirtyy yhden pykälän verran vasemmalle eli luku pienenee. Vastaavasti sadalla jaettaessa pilkku siirtyy kahden pykälän verran ja tuhannella jaettaessa kolmen pykälän verran. Oivalsitko?

a) $56 : 10 = 5{,}6$

b) $1\,900 : 100 = 19$

c) $0{,}065 : 10 = 0{,}0065$

d) $650 : 1\,000 = 0{,}650$

Esimerkki 10

Ensin on osattava täysillä kympeillä kertominen. Ratkaistaan seuraava lasku päässä:
$11 \cdot 30 = ?$

Ajatellaan mielessä ensin lasku $11 \cdot 3$ ja kerrotaan tulos vielä kymmenellä:
$11 \cdot 3 \cdot 10 = 330$

Täysillä kympeillä kertominen on siis varsin helppoa. Sitä täytyykin käyttää apukeinona isoilla luvuilla kerrottaessa, kuten huomaat seuraavasta esimerkistä.

Esimerkki 11

Ratkaistaan siis vaikeampi lasku:
$34 \cdot 12 = ?$

Nyt kannattaa muuttaa toinen kertoja täysiksi kympeiksi ja hajottaa lasku osiin:
$30 \cdot 12 + 4 \cdot 12 = ?$

Kertominen on täysien kymppien ansiosta helppoa, ja hetken päästä aivosi palauttavat vastauksen:
$30 \cdot 12 + 4 \cdot 12 = 360 + 48 = 408$

Esimerkki 12

Laske tehtävä:
$19 \cdot 25 = ?$

Jos toinen kertojista on hieman täyden kymmenen alapuolella, kannattaa menetellä seuraavasti:
$19 \cdot 25 = 20 \cdot 25 - 1 \cdot 25 = 500 - 25 = 475$

Huomasitko, mitä tapahtui? Muutimme toisen kertojan kahdeksikymmeneksi ja vastaavasti vähensimme tuloksesta yhden kerran luvun 25. Näin lopputulos ei muutu mutta päässälasku on paljon helpompaa.

Esimerkki 13

Desimaalilukujen kertolasku ei ole sen vaikeampaa. Erotetaan vain lopusta sama määrä desimaaleja kuin tulontekijöissä on yhteensä:
$1{,}9 \cdot 2{,}5 = 4{,}75$

Vertaa saatua tulosta edelliseen esimerkkiin.

Tehtäviä

Seuraavat tehtävät tulee tehdä ilman laskinta!

On hyvä arvioida vastauksen suuruusluokka ennen lopullisen vastauksen antamista.

1. Testaa ensin, ovatko kertolaskutaitosi kunnossa.

a) $5 \cdot 7 =$ _____ b) $3 \cdot 9 =$ _____ c) $4 \cdot 8 =$ _____ d) $98 \cdot 7 =$ _____ e) $5 \cdot 9 =$ _____

f) $7 \cdot 7 =$ _____ g) $7 \cdot 4 =$ _____ h) $5 \cdot 5 =$ _____ i) $10 \cdot 10 =$ _____ j) $6 \cdot 7 =$ _____

k) $4 \cdot 4 =$ _____ l) $8 \cdot 3 =$ _____ m) $8 \cdot 8 =$ _____ n) $3 \cdot 6 =$ _____ o) $6 \cdot 5 =$ _____

p) $5 \cdot 4 =$ _____ q) $8 \cdot 9 =$ _____ r) $3 \cdot 3 =$ _____ s) $4 \cdot 6 =$ _____ t) $9 \cdot 9 =$ _____

u) $1 \cdot 0 =$ _____ v) $9 \cdot 7 =$ _____ w) $6 \cdot 8 =$ _____ x) $7 \cdot 5 =$ _____ y) $99 \cdot 6 =$ _____

2. Laske ilman laskinta.

a) $20 \cdot 40 =$ _____ b) $30 \cdot 7 =$ _____ c) $40 \cdot 60 =$ _____

d) $20 \cdot 30 =$ _____ e) $30 \cdot 60 =$ _____ f) $70 \cdot 70 =$ _____

3. Laske ilman laskinta.

a) $20 \cdot 41 =$ _____ b) $30 \cdot 71 =$ _____ c) $40 \cdot 31 =$ _____

d) $60 \cdot 22 =$ _____ e) $30 \cdot 62 =$ _____ f) $70 \cdot 82 =$ _____

4. Laske ilman laskinta.

a) $15 \cdot 12 =$ _____ b) $18 \cdot 13 =$ _____ c) $18 \cdot 22 =$ _____

d) $25 \cdot 12 =$ _____ e) $32 \cdot 13 =$ _____ f) $36 \cdot 61 =$ _____

5. Laske ilman laskinta.

a) 28 · 9 = _____ b) 58 · 11 = _____ c) 48 · 19 = _____

d) 19 · 23 = _____ e) 87 · 31 = _____ f) 26 · 61 = _____

6. Laske ilman laskinta.

a) 65 · 42 = _____ b) 29 · 13 = _____ c) 98 · 21 = _____

d) 19 · 81 = _____ e) 14 · 15 = _____ f) 71 · 17 = _____

7. Laske ilman laskinta.

a) 1,8 · 16 = _____ b) 2,8 · 1,9 = _____ c) 0,8 · 1,9 = _____

d) 9,8 · 2,1 = _____ e) 15,1 · 2,1 = _____ f) 3,7 · 0,9 = _____

8. Laske ilman laskinta.

a) 400 : 20 = _____ b) 10 : 20 = _____ c) 6 000 : 50 = _____

d) 50 : 20 = _____ e) 60 : 40 = _____ f) 6 400 : 80 = _____

Kirjoita seuraaviin tehtäviin laskulausekkeet ja ratkaise päässälaskuna.

9. Tarvitset työmaallesi 40 metriä kulmarautaa. Kuinka paljon kulmarauta maksaa yhteensä, kun metrihinta on 5,50 euroa?

_____

10. Yhtä metriä kohden varataan 4 kappaletta tiheäkierteisiä ruuveja. Kuinka paljon ruuvit tulevat maksamaan edellisen tehtävän urakkaan, kun ruuveja myydään 50 kappaleen paketeissa hintaan 7 euroa/pkt?

_____

11. Jarruttoman peräkärryn kantavuus on 500 kg. Teollisuustyömaalle pitää viedä 7 kappaletta isohkoja sähkömoottoreita, joista jokaisen massa on 76 kg. Voitko viedä kaikki moottorit samalla kerralla työmaalle?

12. Metalliverstaan (15 m^2) lattiaan asennetaan sähköinen lattialämmitys. Lattialämmitysmaton hinta on 70 euroa neliömetriltä ja sitä myydään 2,5 m^2:n paketeissa. Kuinka paljon lattialämmitysmaton hinnaksi tulee yhteensä?

13. Samaisen verstaan kattoon laitetaan myös uudet kattolevyt. Kattolevyn hinta on 10,90 €/m^2, ja sen pakkauskoko on 2,1 m^2. Kuinka paljon rahaa kattolevyihin on varattava? Anna vastaus euron tarkkuudella.

14. Valutyö on valmis alkamaan. Valun mitat ovat 10 cm x 5 m x 11 m.

a) Kuinka monta kuutiometriä tilaat betonia?

b) Kuinka paljon betonierä maksaa, kun hinta on 180 euroa/m^3?

15. Induktiokuumentimen teho on 9 kW. Se on päällä 2 tunnin ajan vuorokautta kohti. Kuinka paljon lämmittimen kuluttama sähkö maksaa yhden työviikon aikana (6 vrk), kun yhden kilowattitunnin hinta on 0,11 euroa?

16. Kellari oli rankkasateiden takia täyttynyt vedellä. Kellarista imetään vettä pois uppopumpun avulla. Pumppu kykenee siirtämään vettä 6 m^3/h. Kellarin mitat ovat 2 m x 4 m x 1,9 m. Kuinka kauan kellarin tyhjentäminen kestää? (*Voit käyttää tämän tehtävän ratkaisemiseen laskinta.*)

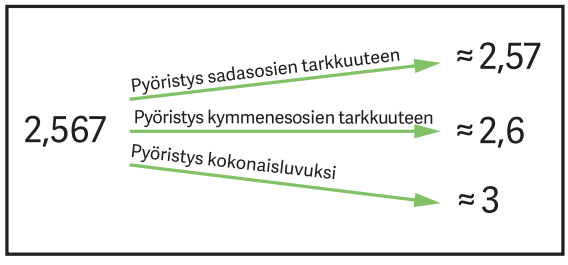
Pyöristäminen ja vastauksen tarkkuus

Pyöristämisellä tarkoitetaan lukujen muuntamista helpommin käsiteltävään muotoon. Jotta vastauksen tarkkuus ei olennaisesti muuttuisi, suoritetaan pyöristäminen vasta lopullisessa vastauksessa.

Pyöristämisen perussääntö on seuraava:

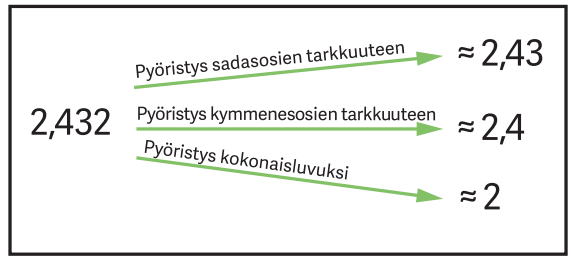
Jos viimeinen pois jätettävä numero on 5 tai sitä isompi, pyöristetään ylöspäin.

Esimerkiksi



Jos viimeinen pois jätettävä numero on alle 5, pyöristetään alaspäin.

Esimerkiksi



Pyöristäminen merkitsevien numeroiden perusteella

Merkitsevillä numeroilla tarkoitetaan kaikkia numeroita paitsi kokonaislukujen oikeassa reunassa olevia nollia ja desimaalilukujen vasemmassa reunassa olevia nollia.

Esimerkki 14

Pyöristä seuraavat luvut kolmen merkitsevän numeron tarkkuuteen:

a) 23,587

Erotetaan luvun vasemmalta puolelta kolme merkitsevää numeroa ja suoritetaan pyöristys:
23,587 ≈ 23,6

b) 145 865

Pyöristys tehdään samoin kuin edellisessä kohdassa:
145 865 ≈ 146 000

c) 1,009

Jälleen kerran pyöristäminen tehdään samoin kuin edellisissä kohdissa. Huomaa, että nollat ovat tässä tapauksessa merkitseviä:
1,009 ≈ 1,01

d) 0,0012309

Koska luvun edessä olevat nollat eivät ole merkitseviä, pyöristys tehdään seuraavalla tavalla:
0,0012309 ≈ 0,00123

e) 1,00003

Erotetaan luvun vasemmalta puolelta kolme merkitsevää numeroa ja suoritetaan pyöristys:
1,00003 ≈ 1,00.

Vastauksen tarkkuus riippuu laskettavien lukujen tarkkuudesta. Pääsääntöisesti lopullinen vastaus ilmoitetaan epätarkimman luvun mukaan.

Esimerkki 15

Laske laskutoimitukset ja pyöristä tulos epätarkimman lähtöarvon mukaan.

a) $2{,}5 + 3{,}21 = 5{,}71 \approx 5{,}7$

b) $10{,}23 \cdot 2{,}546 = 26{,}04558 \approx 26{,}05$

Desimaalilukujen tarkkuus voidaan määritellä myös seuraavan taulukon mukaisesti:

	Kymmenes-osan tarkkuus	Sadasosan tarkkuus	Tuhannesosan tarkkuus	Kymmenes-tuhannes-osan tarkkuus
	TAI	TAI	TAI	TAI
	Yhden desimaalin tarkkuus	Kahden desimaalin tarkkuus	Kolmen desimaalin tarkkuus	Neljän desimaalin tarkkuus
26,357214681349	26,4	26,36	26,357	26,3572
1,555555555	1,6	1,56	1,556	1,5556
10,0909090	10,1	10,09	10,091	10,0909
3,99999	4,0	4,00	4,000	4,0000
0,00057890	0,0	0,00	0,001	0,0006

Esimerkki 16

Laske huoneen kuutiotilavuus, kun huoneen pituus on 6,8 m, leveys 5,2 m ja korkeus 2,56 m.

Ratkaisu: $6{,}8\ \text{m} \cdot 5{,}2\ \text{m} \cdot 2{,}56\ \text{m} = 90{,}5216\ \text{m}^3 \approx 91\ \text{m}^3$

Esimerkki 17

Laske katon pinta-ala kun harjan pituus on 13,2 m ja lappeen pituus on 6,15 m.

Ratkaisu: $13{,}2\ \text{m} \cdot 6{,}15\ \text{m} = 81{,}18\ \text{m}^2 \approx 81{,}2\ \text{m}^2$

Esimerkki 18

Jos luvut pyöristetään ennen laskemista, lopullisen vastauksen tarkkuus heikkenee.

Huoneen mitat: leveys 5,25 m, pituus 7,45 m

Pinta-ala: $5{,}25\ \text{m} \cdot 7{,}45\ \text{m} = 39{,}1125\ \text{m}^2 \approx 39{,}11\ \text{m}^2$

$5{,}3\ \text{m} \cdot 7{,}5\ \text{m} = 39{,}75\ \text{m}^2 \approx 39{,}8\ \text{m}^2$

Jos vastaus saadaan pelkästään yhteen- tai vähennyslaskujen avulla, tulos ilmoitetaan usein yhtä monen desimaalin tarkkuudella kuin epätarkimmassa lähtöarvossa on.

Jos vastauksen saamiseen tarvitaan kerto- tai jakolaskua, tulos ilmoitetaan yhtä monen merkitsevän numeron tarkkuudella kuin epätarkin lähtöarvo.

Jos olet epävarma vastauksen tarkkuudesta, **ilmoita tulos mieluummin liian tarkasti kuin liian epätarkasti.**

Tehtäviä

1. Pyöristä seuraavat luvut sadasosan ja tuhannesosan tarkkuuksiin.

	sadasosien tarkkuudella	tuhannesosien tarkkuudella
0,268123		
0,005972		
0,025197		
2,386145		
28,35971		

2. Pyöristä seuraavat luvut yhden desimaalin tarkkuuteen ja kolmen merkitsevän numeron tarkkuuteen.

	yhden desimaalin tarkkuus	kolmen merkitsevän numeron tarkkuus
21,145		
389,93		
48,257		
2,9569		
3,0159		

3. Ilmoita seuraavat mittaustulokset järkevällä tarkkuudella:

a) Moottorin sylinterien yhteistilavuus on 2 490,5327 cm^3.
(Arvo kirjataan auton rekisteriotteeseen.) _____

b) Seinän paksuus maalikerroksineen on 20,0019 cm.
(Arvoa tarvitaan valittaessa sopivan pituista poranterää läpiporausta varten.) _____

c) Teräksen tiheydeksi saatiin laskemalla 7,849 8891 kg/litra.
(Tiheyden arvoa tarvitaan, koska halutaan laskea, kuinka paljon ihmisen kokoinen teräspatsas painaisi.) _____

d) Saunan tilavuus on 20,5423 m^3.
(Tilavuutta tarvitaan sopivan kiukaan valintaan.) _____

e) Alumiinilevyä tarvitaan 55,6954 m^2.
(Pinta-alaa tarvitaan materiaali-kustannusten laskemiseen.) _____

f) Työmatkan pituus on 8,063 412 km.
(Pituutta tarvitaan veroilmoitusta varten.) _____

g) Digitaalimittarilla mitattu lankahitsin langan paksuus on 0,000 6042 m.
(Paksuutta tarvitaan uuden langan tilaamista varten.) _____

4. Laske ilman laskinta kappalehinta sentin tarkkuudella.

a) 200 kpl ankkuriruuveja maksaa 9,99 € _____

b) 250 kpl ankkurinauloja maksaa 21,95 € _____

c) 50 kpl ikkunapeltiruuveja maksaa 4,99 € _____

Voit helpottaa päässälaskua laskemalla ensin, kuinka paljon 2 ankkuriruuvia tai 1 000 ankkurinaulaa maksaa.

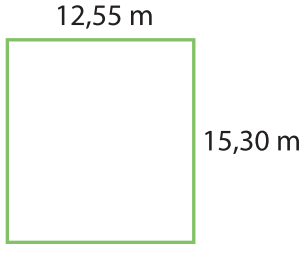
5. Rakennuksen ulkoseinien paksuus on 38,0 cm, ja sen pohja on suorakulmion (suorakaiteen) muotoinen. Rakennuksen ulkomitat ovat 12,55 x 15,30 metriä. Ilmoita vastaukset seuraaviin yhtä tarkasti kuin lähtöarvot on annettu (yhtä monen merkitsevän numeron tarkkuudella).

a) Laske rakennuksen ulkopinta-ala.

_____

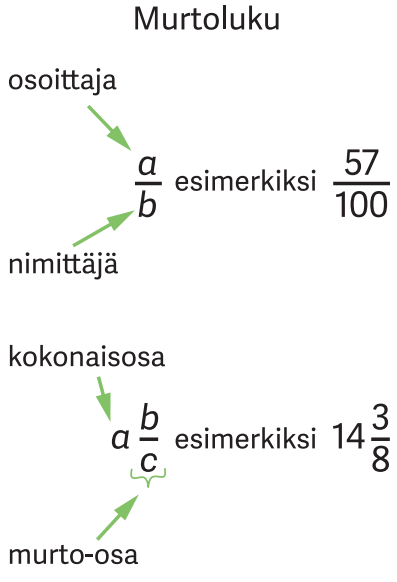
b) Laske rakennuksen sisäpinta-ala

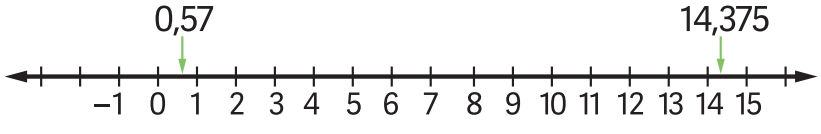
_____



Murtoluvut

Murtolukuja esiintyy jokapäiväisessä elämässämme. Esimerkiksi kaupassa tuote voidaan myydä puoleen hintaan tai rakennusmääräys voi olla sellainen, että tonttipinta-alasta kolme neljäsosaa pitää jäädä vapaaksi rakennuksista. Lisäksi aina, kun jokin mitta on jaettu väleihin, voidaan ajatella, että kyseessä on murtoluku. Murtolukujen ymmärtäminen helpottaa laskemista ja nopeuttaa suuruuksien arviointia.





Murtoluku sekaluvuksi

Murtoluvun muuntaminen sekaluvuksi perustuu siihen, että murtoluku on toinen nimitys jakolaskulle.

Esimerkiksi murtoluvun $\frac{17}{5}$ muunto sekaluvuksi:

$$\frac{17}{5} = \frac{5 + 5 + 5 + 2}{5}$$

$$= 3\frac{2}{5}$$

Sekaluku murtoluvuksi

Kun sekaluvun kokonaisosan ja nimittäjän tulo lisätään osoittajaan, saadaan murtoluvun **osoittaja.** Murtoluvun **nimittäjä** pysyy samana kuin se oli sekaluvussa.

$$4\frac{2}{11} = \left(\frac{4 \cdot 11 + 2}{11}\right) = \frac{46}{11}$$

Huomaa:

$$\frac{46}{11} = \left(\frac{11 + 11 + 11 + 11 + 2}{11}\right)$$

$$= 4\frac{2}{11}$$

Murtoluvun laventaminen

Laventamisessa sekä osoittaja että nimittäjä kerrotaan samalla luvulla.

Laventaminen merkitään murtoluvun vasempaan ylälaitaan.

Esimerkiksi murtoluvun $\frac{2}{3}$ laventaminen neljällä:

$$\overset{4)}{\frac{2}{3}} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3}$$

$$= \frac{8}{12}$$

Murtoluvun supistaminen

Supistamisessa sekä osoittaja että nimittäjä jaetaan samalla luvulla.

Supistaminen merkitään murtoluvun oikeaan ylälaitaan.

Esimerkiksi murtoluvun $\frac{12}{108}$ supistaminen sievimpään mahdolliseen muotoon:

$$\frac{12}{108} \overset{(2}{=} \frac{6}{54} \overset{(2}{}$$

$$= \frac{3}{27} \overset{(3}{=} \frac{1}{9}$$

Esimerkki 19

Muunna luku 2,15 murtoluvuksi ja sekaluvuksi.

Ratkaisu:

$$2{,}15 = \frac{2{,}15}{1}$$

$$\overset{100)}{\frac{2{,}15}{1}} = \frac{215}{100}$$

$$\frac{215}{100} \overset{(5}{=} \frac{43}{20}$$

$$\frac{43}{20} = 2\frac{3}{20}$$

Vastaus: 2,15 on murtolukuna $\frac{43}{20}$ ja sekalukuna $2\frac{3}{20}$.

Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku

Samannimiset murtoluvut

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Murtoluvuilla eri nimittäjä
Murtoluvut on lavennettava samannimisiksi:

$$\overset{d)}{\frac{a}{b}} + \overset{b)}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\overset{3)}{\frac{2}{5}} - \overset{5)}{\frac{6}{3}} = \frac{6}{15} - \frac{30}{15} = \frac{6-30}{15} = \frac{-14}{15} = -\frac{14}{15}$$

Murtolukujen kerto- ja jakolasku

Murtolukujen tulo

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{2} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 2} = \frac{20}{14} \overset{(2}{=} \frac{10}{7} = \left(1\frac{3}{7}\right)$$

Murtolukujen osamäärä

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{3}{7} : \frac{1}{4} = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{1} = \frac{12}{7} = \left(1\frac{5}{7}\right)$$

Esimerkki 20

Laske 300 : 1,5 käyttämällä apuna murtolukujen laskusääntöjä.

Ratkaisu:

$$300 : 1{,}5 = 300 : \frac{15}{10} \overset{(5}{=} 300 : \frac{3}{2}$$

$$300 : \frac{3}{2} = \frac{300}{1} : \frac{3}{2}$$

$$\frac{300}{1} : \frac{3}{2} = \frac{300}{1} \cdot \frac{2}{3}$$

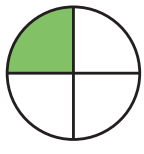
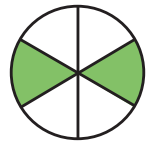
$$\frac{300}{1} : \frac{3}{2} = \frac{300}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{600}{3} = 200$$

Tehtäviä

1. Kirjoita sekä murto- että desimaalilukuna seuraavat luvut ja opettele ne ulkoa, sillä niitä tarvitaan lähes päivittäin!

		murtoluku	desimaaliluku			murtoluku	desimaaliluku
a)	yksi kymmenesosa	$\frac{1}{10}$	0,1	g)	kaksi kolmasosaa		
b)	yksi sadasosa			h)	yksi neljäsosa		
c)	yksi tuhannesosa			i)	kolme neljäsosaa		
d)	yksi yhdesosa			j)	yksi kahdeksasosa		
e)	yksi kahdesosa			k)	yksi viidesosa		
f)	yksi kolmasosa			l)	yksi kuudesosa		

2. Kirjoita sekä murto- että desimaalilukuna, kuinka suuri osa kuviosta on tummennettu. Jos desimaaliluku ei ole päättyvä, pyöristä se tuhannesosien tarkkuuteen.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
						
murtoluku						
desimaaliluku						

3. Kuvassa esitetään graafisesti kaksi murtolukuparia. Vastaa kuvien alapuolelle,

a) mitä murtolukua tummennetut alueet kuvaavat

b) millä luvulla pareista vasemmanpuoleinen pitää laventaa tai supistaa, jotta se muuttuu parikseen

c) mikä on näiden neljän murtoluvun summa.

a) _____ _____ _____ _____

b) _____ _____

c) _____

4.

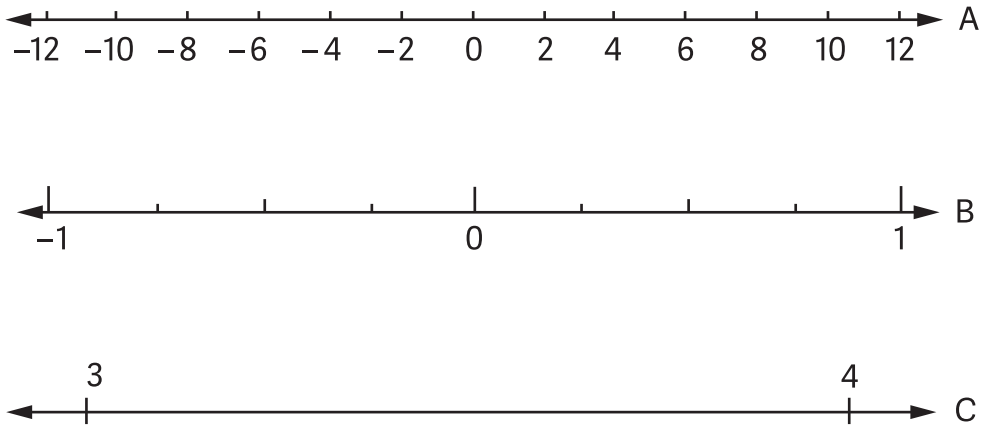
a) Sijoita luku "yksi neljäsosaa" lukusuoralle B niin tarkasti kuin pystyt.

b) Sijoita luvut "miinus yksi kahdeksasosaa" ja "miinus kolme kahdeksasosaa" lukusuoralle B niin tarkasti kuin pystyt (*tee tarvittaessa apuviivoja*).

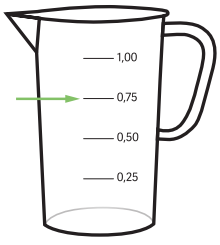
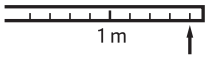
c) Sijoita luku $\frac{2}{3}$ lukusuoralle B niin tarkasti kuin pystyt (*tee tarvittaessa apuviivoja*).

d) Sijoita luvut $3\frac{5}{6}$ ja $\frac{15}{4}$ lukusuorille C ja A niin tarkasti kuin pystyt.

e) Sijoita luku $\frac{93}{10}$ jollekin alla olevista lukusuorista niin tarkasti kuin pystyt.



5. Taulukossa on kuvia erilaisista mitoista. Ilmoita seka-, murto- ja desimaalilukuna, mitä lukua mittaan merkityllä nuolella tarkoitetaan. Ilmoita myös puolen yksikön tarkkuudella luvun likiarvo.

	sekaluku	murtoluku	desimaali-luku	likiarvo puolen yksikön tarkkuudella
		$\frac{93}{10}$		
				
			126,4	126,5
		$\frac{9}{5}$		

6. Laita seuraavat luvut suuruusjärjestykseen aloittaen pienimmästä luvusta:

a) kolme miljoonaa

b) tuhat tuhatta

c) kuusi tuhannesosaa

d) kaksi kolmasosaa

e) kuusisataa sadasosaa

f) viisisataa prosenttia

g) yksi neljäsosa

h) $\frac{9\,000}{1\,000\,000}$

i) 0,005

j) 13,99999

k) $14\frac{9}{1000}$

l) $14\frac{10}{100}$

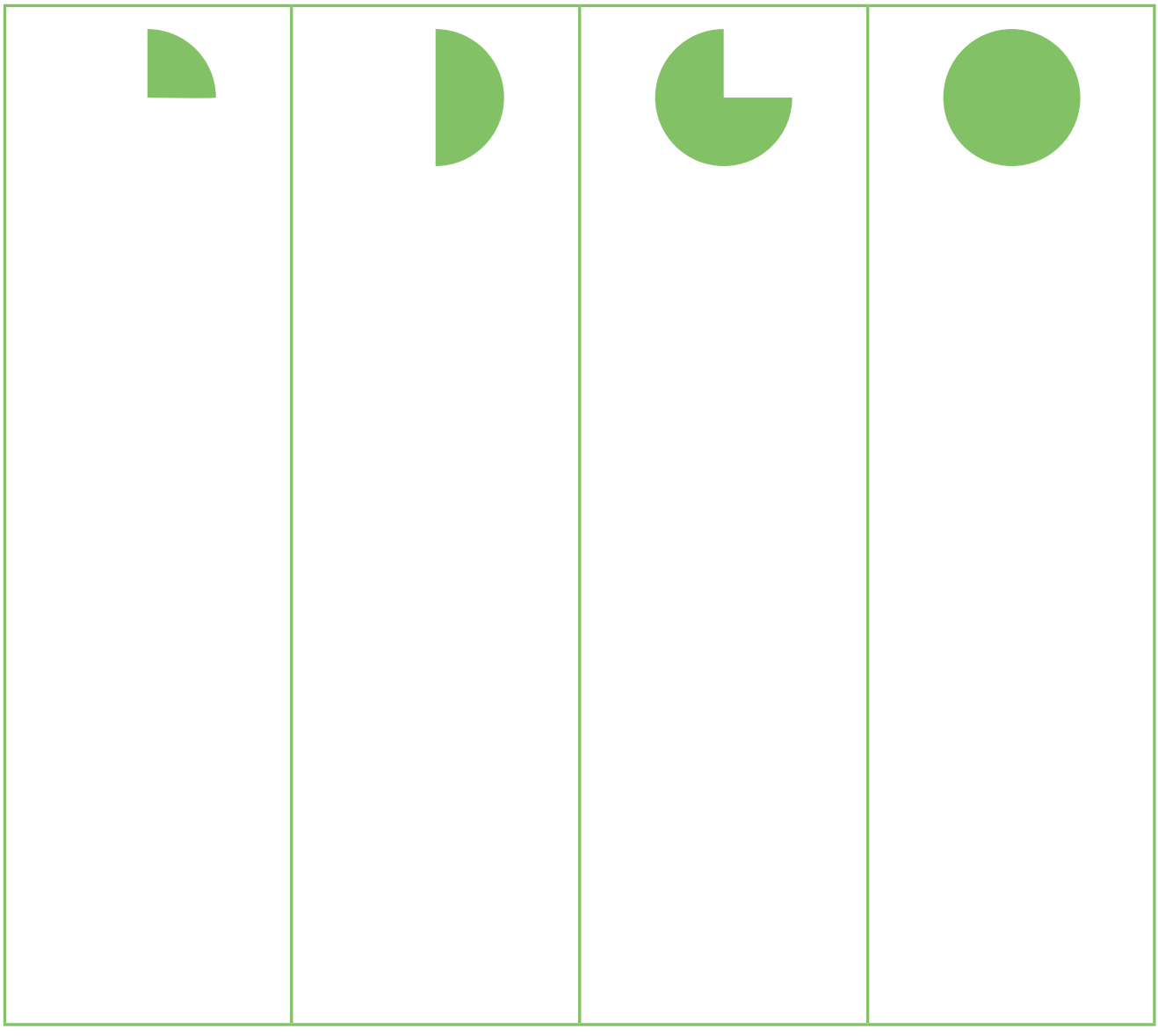
m) –1

n) 0

7. Alapuolella on neljä kuviota. Kirjoita laatikkoon, mikä alla oleva luku sopii mihinkin kuvioon.

4/4	0,75	50 %	2 000/4 000	9/12	100 %	4/16
75 senttiä	puoli euroa	3/4	4/8	kvartaali	10/10	yksi euro
3/12	5/20	0,5	neljännes	0,2500	kokonainen	6/8
yksi viidesosa	75 %	7 500/10 000				

Muista, että prosentti on murtolukuna sadasosa. Esimerkiksi 7 % = $\frac{7}{100}$.



8. Lavenna tai supista murtolukuja siten, että ne tulevat samannimisiksi. Kun olet laventanut murtoluvut, laita niiden väliin jokin seuraavista merkeistä: <, > tai =

a) $\frac{3}{4}$ ja $\frac{14}{24}$ _____

b) $\frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{8}$ _____

c) $\frac{3}{5}$ ja $\frac{15}{25}$ ja $\frac{22}{50}$ _____

9. Laske ilman laskinta. Jos mahdollista, ilmoita vastaus sekalukuna. Sijoita vastaus tehtävän alapuolella olevalle lukusuoralle. Lukusuoran avulla opit hahmottamaan murtolukujen suuruusluokkia, mikä on tärkeä taito!

a) $\frac{2}{5} + \frac{6}{5} =$ _____

Muista, että nimittäjiä ei lisätä toisiinsa.

b) $1\frac{2}{3} + 2\frac{4}{3} =$ _____

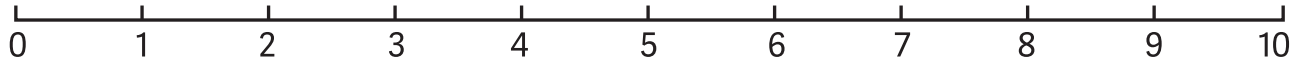
Voit laskea kokonaisosat erikseen yhteen tai muuntaa sekaluvut murtoluvuiksi.

c) $5\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3} =$ _____

Voit vähentää kokonaisosat ensin ja murto-osat lopuksi.

d) $2\frac{2}{5} - 1\frac{3}{5} =$ _____

Nyt kannattaa muuttaa sekaluku murtoluvuksi.



10. Laske ilman laskinta. Jos mahdollista, ilmoita vastaus sekalukuna. Sijoita vastaus tehtävän alapuolella olevalle lukusuoralle.

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{4} =$ _____

Lavenna murtoluvut ensin: lavennettaessa sekä osoittaja että nimittäjä kerrotaan samalla luvulla.

b) $1\frac{2}{10} + 2\frac{4}{5} =$ _____

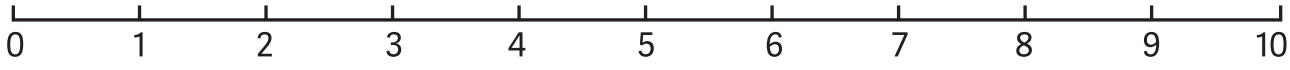
Voit laskea kokonaisosat erikseen yhteen tai muuntaa sekaluvut murtoluvuiksi.

c) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} =$ _____

Yhteiseksi nimittäjäksi tulee lukujen 4, 3 ja 5 tulo.

d) $2\frac{1}{4} - 1\frac{3}{5} =$ _____

Lavenna ensin murto-osat. Muunna sitten sekaluvut murtoluvuksi.



11. Laske ilman laskinta. Jos mahdollista, ilmoita vastaus sekalukuna.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} =$ _____

Kertolaskussa ei lavenneta.

b) $1\frac{2}{10} \cdot 2\frac{4}{5} =$ _____

Muunna aluksi sekaluvut murtoluvuksi.

c) $5\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3} =$ _____

Muunna aluksi sekaluvut murtoluvuksi.

d) $2\frac{1}{4} \cdot 6 =$ _____

Kuusi on sama asia kuin kuusi yhdesosaa.

12. Laske ilman laskinta. Jos mahdollista, ilmoita vastaus sekalukuna.

a) $\frac{2}{3} : \frac{5}{4} =$ _____

Jakolaskussa jakaja "käännetään ensin ympäri" eli jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla.

b) $1\frac{2}{10} : 2\frac{4}{5} =$ _____

Muunna aluksi sekaluvut murtoluvuksi.

c) $5\frac{4}{5} : 2\frac{1}{2} =$ _____

Muunna aluksi sekaluvut murtoluvuksi.

d) $2\frac{3}{4} : 4 =$ _____

Neljä on sama asia kuin neljä yhdesosaa.

13. Näyttelytilan seinän pinta-ala on 10 m^2. Seinälle sijoitetaan esille erilaisia sähköjohtomalleja, pistorasiamalleja ja kytkimiä. Sähköjohdoille varataan seinästä yksi viidesosa, pistorasioille ja kytkimille yhteensä seitsemän kymmenesosaa. Paljonko seinälle jää tilaa otsikkoa varten neliömetreinä?

14. Laske ilman laskinta. Ilmoita tulos joko murto-, seka- tai desimaalilukuna. Sijoita vastaus lopuksi johonkin tehtävän alapuolella olevista lukusuorista.

Jos lasku tuntuu vaikealta, muunna luvut ensin murtoluvuiksi. Tämä helpottaa usein laskemista!

a) 1,5 + 1,25 = _____

b) 2,2 · 3 = _____

c) 0,75 + 0,8 = _____

d) 0,5 : 2 = _____

e) 0,3 · 0,2 = _____

Huomaa, että vastaus ei ole 0,6.

f) 1,14 : 2 = _____

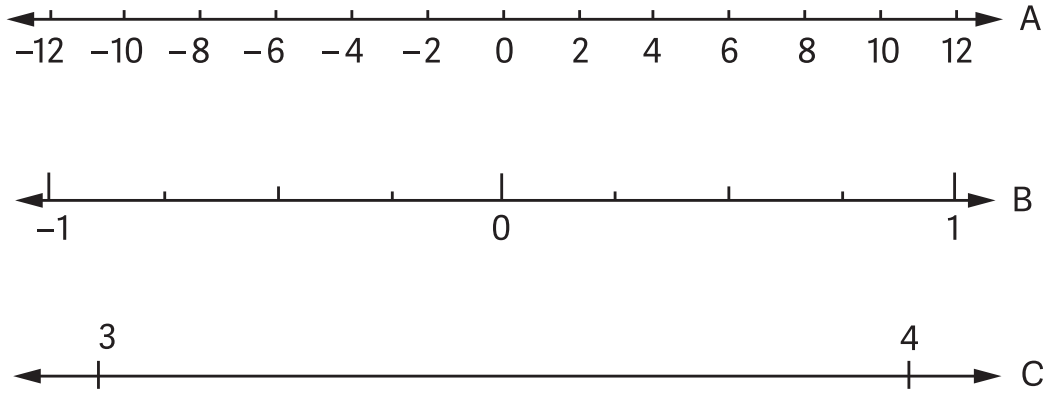
Tämä voi olla helpompi murtolukuna.

g) 1,25 : 0,75 = _____

Tämä on murtoluvuiksi muutettuina helppo lasku.

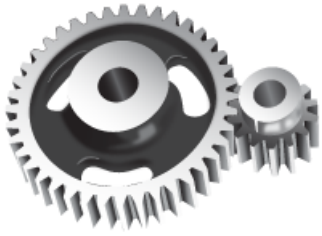
h) 4 : 1,2 = _____

Tämä on murtoluvuiksi muutettuina helppo lasku.



15. Suunnittele hihnalla toimiva vaihteisto, jonka avulla saadaan kuusinkertaistettua akselin pyörimisnopeus. Mikä on tällöin välityssuhde?

16. Kahden hammaspyörän välityssuhde on pyörivän hammaspyörän hampaiden lukumäärän suhde pyörittävän hammaspyörän hampaiden lukumäärään. Välityssuhde voidaan laskea esimerkiksi hammaspyörä-, ketju- ja hihnavälityksille.

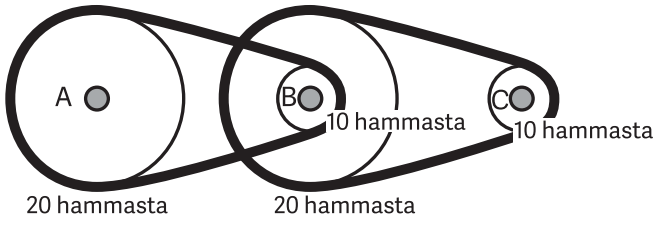


Jos esimerkiksi moottorin kampiakselin päässä on 10-hampainen hammasratas, joka on kiinni 30-hampaisessa hammasrattaassa, on välityssuhde 3:1. Perustelu: $\frac{30}{10}\ ^{(3} = \frac{3}{1} = 3:1$

Välityssuhde kertoo kuinka monta kertaa nopeammin käyttävä eli pyörittävä akseli pyörii kuin käytettävä akseli. Jos esimerkiksi autolla ajetaan vaihteella, jolla saadaan kokonaisvälityssuhteeksi neljä, moottorin kierrosnopeus on nelinkertainen verrattuna vaihdelaatikosta lähtevään akseliin.

a) Polkupyörän etuosassa olevassa hammasrattaassa on 45 hammasta. Takarattaassa on 15 hammasta. Osoita laskemalla, että välityssuhde on 1:3.

b) Moottorissa on kiinni hammaspyörä, jossa on 20 hammasta. Käytettävässä akselissa on 12 hammasta. Kuinka monta kierrosta käytettävä akseli pyörii minuutissa, jos moottorin kierrosnopeus on 500 rpm?



c) Kuinka monta kierrosta minuutissa yllä olevan kuvan akseli C pyörii, jos akseli A pyörii 500 kierrosta minuutissa?

17. Metallisen koristehyllykön korkeus on 1,2 m. Hyllyjen sijoituskorkeudet ovat 1/6 ja 1/3 hyllykön korkeudesta. Millä korkeudella hyllyt sijaitsevat?

18. Sorvin leikkuunestesäiliö piti tyhjentää säiliössä ilmenneen vuodon vuoksi. Pajalta kerättiin kaikki astiat, joihin neste voitiin laittaa väliaikaisesti. Astioita kertyi seuraavasti: yksi 20 litran kanisteri, kolme 5 litran astiaa ja kaksi 10 litran astiaa. Lisäksi löytyi lasipulloja, joista kolmeen mahtui $\frac{3}{4}$ litraa ja neljään $\frac{1}{3}$ litraa. Kuinka paljon leikkuunestettä meni hukkaan kun säiliön tilavuus oli 60 litraa?

Potenssit ja juuret

Potenssi

Potenssi on lyhennetty merkintä tulolle, jossa kantalukua kerrotaan itsellään eksponentin ilmoittaman luvun verran.

Yllä oleva lauseke luetaan ”viisi potenssiin kahdeksan” tai ”viisi kahdeksanteen”.
Toista potenssia kutsutaan usein **neliöksi** ja kolmatta potenssia **kuutioksi**.
Esimerkiksi 3^2 on luvun kolme neliö ja 5^3 on luvun viisi kuutio.

Esimerkki 21

Laske a) 2^3 b) $(-1)^4$ c) -2^3

Ratkaisu:

a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

b) Kantaluku on –1, koska se on sulkujen sisällä.

$(-1)^4 = -1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$

c) Nyt kantalukuna ei olekaan –2 vaan pelkästään 2. Vastaus on negatiivinen.

$-2^3 = -(2 \cdot 2 \cdot 2) = -8$

Laskimessa potenssi merkitään näppäimellä x^y tai ^ .

Tehtäviä

1. Yhdistä potenssimerkintä ja luku. Yksi kohta on ratkaistu jo malliksi.

0^3	2^5	10^1	6^2	$(-3)^2$	-3^2	10^3
36	1 000	9	32	10	–9	0

2. Laske ilman laskinta.

a) 3^2 = _____ b) 5^2 = _____ c) 1^3 = _____

d) 0^2 = _____ e) 2^4 = _____ f) $(-2)^3$ = _____

g) $(-5)^2$ = _____ h) -3^2 = _____ i) -4^2 = _____

3. Muuta lausekkeet potenssimerkinnöiksi ja laske laskimella.

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ = _____ = _____

b) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$ = _____ = _____

c) $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ = _____ = _____

4. Laske laskimella. Jos vastaus on desimaaliluku, pyöristä se kahden desimaalin tarkkuudella.

a) 12^2 = _____ b) $2{,}3^4$ = _____ c) $(-1{,}1)^5$ = _____

d) $(3{,}2 + 1{,}5)^2$ = _____ e) $1{,}2^{10}$ = _____ f) $-0{,}99^0$ = _____

5. Laske ympyrän muotoisen hydrauliikkaputken poikkileikkauksen pinta-ala, kun putken säde on 10 mm. Ympyrän pinta-ala (A) lasketaan kaavalla $A = \pi \cdot r^2$, jossa r = ympyrän säde.

_____

_____

6. Laske ilman laskinta.

a) Luvun 8 neliö on _____

b) Luvun 10 neliö on _____

c) Luvun –5 neliö on _____

d) Luvun 4 kuutio on _____

e) Luvun 3 kuutio on _____

f) Luvun –2 kuutio on _____

7. Osakkeen arvo kaksinkertaistuu joka vuosi. Mikä on osakkeen arvo 7 vuoden kuluttua, kun sen arvo nyt on 1,50 €?

8. Tietokoneen arvon on arvioitu puolittuvan joka vuosi. Mikä on tietokoneen arvo 4 vuoden kuluttua, kun se nyt on 2 000 €?

9. Minna osallistuu punnerrushaasteeseen, jossa joka viikko tuplataan punnerrusten määrä. Ensimmäisellä viikolla punnerruksia tehdään kaksi päivässä. Toisella viikolla neljä päivässä jne. Kuinka monta punnerrusta Minna tekee päivässä

a) 5 viikon kuluttua _____

b) 10 viikon kuluttua? _____

10. Kuinka monta erilaista vastausriviä voi saada monivalintakokeesta, kun tehtäviä on kahdeksan ja vastausvaihtoehtoja kolme?

11. Miralla on matkalla mukanaan housuja, puseroita ja kenkäpareja kutakin 5 kappaletta. Kuinka monta asuyhdistelmää hän voi näistä muodostaa?

12. Kun A1-kokoinen arkki puolitetaan, saadaan A2-kokoinen arkki. Kun A2-arkki jaetaan kahtia, saadaan A3-kokoinen arkki jne. Kuinka monta A8-kokoista arkkia saadaan A1-arkista?

Negatiivinen potenssi

Eksponentti voi olla myös negatiivinen. Kun eksponenttina on negatiivinen luku, otetaan kantaluvusta käänteisluku, joka korotetaan positiiviseen potenssiin.

Esimerkki 22

Laske a) 3^{-2} b) 2^{-3}.

Ratkaisu:

a) Kantaluvun 3 käänteisluku on $\frac{1}{3}$, $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$

b) $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$

Tehtäviä

1. Yhdistä parit. Huomaa, että osa luvuista jää ilman paria.

2^{-2} 10^{-2} 3^{-1} 7^{-2} $(-3)^{-2}$ $(-2)^{-3}$ $-\frac{1}{9}$

$\frac{1}{3}$ 9 $\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{3}$ 0,01 $\frac{1}{49}$ 0 $-\frac{1}{8}$

2. Laske ilman laskinta.

a) $2^{-1} =$ _____ b) $10^{-1} =$ _____ c) $5^{-2} =$ _____ d) $8^{-2} =$ _____

e) $1^{-3} =$ _____ f) $(-1)^{-3} =$ _____ g) $(-3)^{-2} =$ _____ h) $5^{-3} =$ _____

3. Laske laskimella. Anna vastaus desimaalilukuna kahden desimaalin tarkkuudella.

a) $1{,}6^{-3} =$ _____ b) $0{,}5^{-4} =$ _____ c) $1{,}5^{-8} =$ _____ d) $0{,}7^{-4} =$ _____

Kymmenpotenssi

Kymmenpotenssimerkintöjä käytetään, kun luku on hyvin pieni tai vastaavasti hyvin suuri. Laskin näyttää isot luvut kymmenpotenssimuodossa.

Esimerkiksi Maapallon etäisyys Auringosta (149 500 000 km) on kymmenpotenssimuodossa $1{,}495 \cdot 10^8$ km.

Suurilla luvuilla kymmenen eksponentti on positiivinen ja pienillä luvuilla negatiivinen. Kun luvun kymmenen eksponentti on positiivinen, se kertoo, kuinka monta nollaa kertoimen perään tulee tai kuinka monen pykälän verran pilkkua siirretään oikealle.

$1{,}495 \cdot 10^8$ km

kerroin — kymmenpotenssi

Esimerkki 23

Kirjoita ilman potenssimerkintää luvut a) $2 \cdot 10^5$ ja b) $3{,}135 \cdot 10^7$.

Ratkaisu:

a) $2 \cdot 10^5 = 200\,000$ b) Pilkku siirtyy 7 pykälän verran oikealle, eli $3{,}135 \cdot 10^7 = 31\,350\,000$.

Kun luvun kymmenen eksponentti on negatiivinen, se kertoo, kuinka monta nollaa tulee kertoimen eteen tai kuinka monen pykälän verran pilkkua siirretään vasemmalle.

Esimerkki 24

Kirjoita ilman potenssimerkintää luvut a) $3 \cdot 10^{-5}$ ja b) $6{,}15 \cdot 10^{-8}$.

Ratkaisu:

a) $3 \cdot 10^{-5} = 0{,}00003$ b) $6{,}15 \cdot 10^{-8} = 0{,}0000000615$

Laskimessa on kymmenpotenssille oma pikanäppäin:

EXP tai 10^x

Esimerkiksi potenssimerkintä $2 \cdot 10^{-5}$ voidaan kirjoittaa laskimella:

2 EXP 5

Kymmenpotensseja käytetään apuna myös yksiköiden etuliitteissä (kilo, giga jne.).

Tehtäviä

1. Yhdistä parit.

Maapallon halkaisija (km)	$5 \cdot 10^{-4}$
Maapallon väkiluku	$1{,}3 \cdot 10^{4}$
Ihmisen keskimääräinen hiusmäärä	$7 \cdot 10^{9}$
Bakteerin koko (m)	$2 \cdot 10^{-6}$
Kynnen paksuus (m)	$1 \cdot 10^{5}$

2. Kirjoita ilman potenssimerkintää.

a) $4 \cdot 10^{5}$ = _____ b) $8 \cdot 10^{7}$ = _____ c) $1{,}25 \cdot 10^{4}$ = _____

d) $6{,}7 \cdot 10^{8}$ = _____ e) $2 \cdot 10^{-3}$ = _____ f) $5 \cdot 10^{-6}$ = _____

g) $3{,}89 \cdot 10^{-4}$ = _____ h) $7{,}2 \cdot 10^{-7}$ = _____ i) $0{,}5 \cdot 10^{-5}$ = _____

3. Kirjoita seuraavat luvut kymmenpotenssimuodossa.

a) 4 000 000 = _____ b) 3 400 000 000 = _____

c) 2,5 miljoonaa = _____ d) 0,000 005 = _____

e) 0,000 001 2 = _____ f) 0,001 89 = _____

4. Kuparin tiheys on noin $8{,}96 \cdot 10^{3}$ kg/m^3. Kuinka monta kilogrammaa 2 m^3 kuparia painaa? Ilmoita vastaus ilman kymmenpotensseja.

_____

5. Ihmisessä on bakteereja noin 10^{15} kappaletta. Yksi bakteeri painaa keskimäärin $1{,}5 \cdot 10^{-12}$ g. Kuinka monta kilogrammaa ihmisessä olevat bakteerit painavat yhteensä?

_____

6. Laske seuraavat laskut laskimella ja ilmoita vastaukset kymmenpotenssimuodossa.

a) $5{,}3 \cdot 10^{8} \cdot 10^{10} =$ _____

b) $1{,}12 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}53 \cdot 10^{-8} =$ _____

c) $6{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 9{,}88 \cdot 10^{10} =$ _____

7. Lämpötilan noustessa kappaleet laajenevat. Kuparin lämpölaajenemiskerroin on $17 \cdot 10^{-6}$ 1/°C. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että jos käytössä on 2 metriä pitkä kuparijohdin, ja lämpötila nousee 1 celsiusasteen, kuparijohto muuttuu 2 metriä + $2 \cdot 17 \cdot 10^{-6}$ metriä pitkäksi.

Täydennä aukkokohdat yllä olevan tiedon perusteella:

Luku $17 \cdot 10^{-6}$ on ilman kymmenpotensseja _____ . Kesällä auringossa kuparijohtimen lämpötila voi olla + 60 °C ja talvella ulkotiloissa −40 °C.

Jos kuparijohdin on −40 °C:n lämpötilassa 2,5 metriä pitkä, on se kesällä + 60 °C:n lämpöisenä

2,5 m + _____ = _____ metriä.

Pituusero on siten _____ metriä eli _____ senttimetriä.

8. Vuonna 2016 Suomessa tuotettiin tuulivoimalla 3 100 GWh (= $3\,100 \cdot 10^{9}$ Wh) sähköenergiaa. Riittääkö tämä kattamaan Viron sähkönkulutuksen, joka oli vuonna 2016 yhteensä noin 10,4 TWh (= $10{,}4 \cdot 10^{12}$ Wh)?

_____

_____

9. Yksi gigatonni on kilogrammoina $1{,}0 \cdot 10^{6}$ kg. Kuinka monta paunaa tämä vastaa, kun yksi pauna on noin 454 g. Ilmoita tuloksesi kymmenpotenssimuodossa.

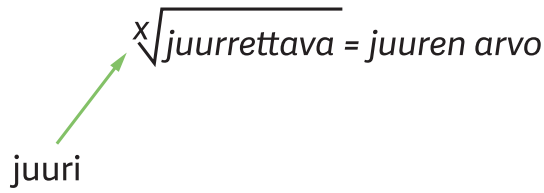
_____

_____

Juuret

Juuren ottaminen on käänteinen operaatio potenssiin korottamiselle.

Yleisimmin käytetty juuri on toinen juuri. Tällöin juuresta käytetään nimitystä neliöjuuri ($\sqrt{\ }$).



Esimerkki 25

Kuinka paljon on $\sqrt{9}$?

Ratkaisu:
On mietittävä, mikä luku toiseen potenssiin korotettuna on 9.

$\sqrt{9} = 3$, koska $3^2 = 9$.

Huom.! Vastaus voi olla myös −3, sillä $(-3)^2 = 9$. Tässä kirjassa vastaukseksi riittää positiivinen luku, sillä ne ovat käytännön kannalta yleisempiä.

Neliöjuuri on siis toiseen potenssiin korottamisen vastatoimenpide. Huomaathan, että $\sqrt[2]{\ } = \sqrt{\ }$.

Neliöjuuren lisäksi on olemassa muitakin juuria. Esimerkiksi kolmas juuri on nimeltään **kuutiojuuri** ja sitä merkitään $\sqrt[3]{\ }$.

Esimerkki 26

$\sqrt[3]{8} = 2$, koska $2^3 = 8$.

Muut juuret ovat nimeltään neljäs juuri, viides juuri jne. Huom.! Kun juuri on parillinen luku ($\sqrt{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[6]{\ }$), juurrettava ei voi olla negatiivinen luku.

Esimerkki 27

Juureen $\sqrt{-4}$ ei ole ratkaisua, koska $(-2)^2 = 4$ ja $2^2 = 4$, joten kumpikaan luvuista –2 tai 2 ei käy vastaukseksi.

Tehtäviä

1. Etsi neliöjuurimerkintöihin sopivat parit. Yksi kohta on jo ratkaistu malliksi.

$\sqrt{-25}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt[3]{27}$	$\sqrt[3]{-8}$	$\sqrt[4]{16}$	$\sqrt{36}$
1	–2	6	–5	ei vastausta	3	5	2

2. Laske seuraavat juuret ilman laskinta.

a) $\sqrt{4}$ = _____ b) $\sqrt{25}$ = _____ c) $\sqrt{49}$ = _____

d) $\sqrt{81}$ = _____ e) $\sqrt{-36}$ = _____ f) $\sqrt{0}$ = _____

3. Laske seuraavat juuret laskimella. Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

a) $\sqrt{125}$ = _____ b) $\sqrt{450}$ = _____ c) $\sqrt{23\,000}$ = _____

d) $\sqrt[3]{345}$ = _____ e) $\sqrt[3]{4\,440}$ = _____ f) $\sqrt[3]{14\,930}$ = _____

4. Laske seuraavat juuret ilman laskinta.

a) $\sqrt[3]{-1}$ = _____ b) $\sqrt[3]{1000}$ = _____ c) $\sqrt[3]{1}$ = _____

5. Kirjoita juuren sisään juurrettava.

a) $\sqrt{}$ = 5 b) $\sqrt{}$ = 8 c) $\sqrt{}$ = 10 d) $\sqrt{}$ = 25

6. Neliön muotoisen tilan pinta-ala on 160 m^2. Mikä on tilan sivun pituus?

_____

7. Kuution pinta-ala on 3 600 mm^2. Mikä on kuution sivun pituus?

_____

_____

8. Pihaan halutaan sadevesiallas, johon mahtuu vettä 2 m^3. Altaasta halutaan kuution muotoinen. Mikä on sadevesialtaan sivun pituus oltava? Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.

9. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus (c) saadaan ratkaistuksi kaavalla $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, kun kateettien sivujen pituudet (a ja b) tiedetään. Laske hypotenuusan pituus, kun suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 2,5 m ja 3,5 m.

10. Ratkaise seuraavat yhtälöt.

a) $x^2 = 25$

b) $x^4 = 256$

c) $2x^2 = -50$

d) $x^{10} = 1\,024$

11. Ympyrän muotoisen metallilevyn pinta-alan pitää olla 20 cm^2. Mikä pitää tällöin olla levyn säteen (r) pituus? Ympyrän pinta-ala (A) lasketaan kaavalla $A = \pi \cdot r^2$, jossa r = ympyrän säde.

2

Kerrannaisyksiköt

- Kilosta milleihin
- Pikosta teraan
- Pituus
- Massa
- Vetomitat
- Pinta-alan yksiköt
- Tilavuuden yksiköt
- Yksiköiden yhdistäminen ja tuuma
- Ajan yksiköt

Kilosta milleihin

Yksiköiden muuntamisessa on tärkeää ymmärtää etuliitteiden merkitys. Kun ymmärrät niiden merkityksen, voit muuttaa mitä tahansa yksikköä kerrannaisyksiköihinsä. Ainut ulkoa opittava asia on seuraava taulukko:

Etuliite ja sen merkki	Kerroin
kilo, k	1 000
hehto, h	100
deka, da	10
desi, d	0,1
sentti, c	0,01
milli, m	0,001

Usein yksikkömuunnoksissa taulukkoa käytetään vaakatasossa, jolloin pilkun siirto on helpompaa:

k kilo	h hehto	da deka	*perusyksikkö* *– ei etuliitettä*	d desi	c sentti	m milli

Etuliitteitä käytetään nimensä mukaisesti. Etuliitteen merkki laitetaan halutun yksikön eteen, jolloin se toimii kertoimena kyseiselle yksiköllle.

Olet ehkä kuullut käytettävän esimerkiksi termiä kiloeuro. Jos pankkitililläsi on 2 k€, sen saldo näyttää 2 000 €. Juuri samalla periaatteella kaksi kilogrammaa on kaksi tuhatta grammaa. Osaisit siis muuttaa kilogrammat grammoiksi, vaikket tietäisi grammoista yhtään mitään! Tässä piilee etuliitteiden käytön hienous.

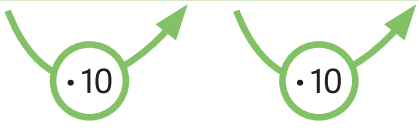
Esimerkki 1

Kuinka monta halkoa on hehtohalko?

Tapa 1
Koska hehto-etuliitteen kerroin on 100, hehtohalko on 100 halkoa.

Tapa 2
Siirretään pilkkua alla olevan taulukon avulla. Perusyksikkö on tässä tapauksessa halko. Jotta päästään hehto-kertoimesta perusyksikköön, pilkkua on siirrettävä kahden pykälän verran oikealle:

k kilo	h hehto	da deka	*perusyksikkö* *– ei etuliitettä*	d desi	c sentti	m milli



Esimerkki 2

Varastorakennuksen pituus voi olla 400 dekatuumaa. Kuinka pitkä se on tuumina?

Tapa 1
Koska deka-etuliitteen kerroin on 10, dekatuuma merkitsee 10 tuumaa.
Yhteensä siis 400 · 10 tuumaa = 4 000 tuumaa.

Tapa 2
Perusyksikkö on tässä tapauksessa tuuma. Jotta päästään deka-kertoimesta perusyksikköön, pilkkua on siirrettävä kerran oikealle:

k kilo	h hehto	da deka	*perusyksikkö* *– ei etuliitettä*	d desi	c sentti	m milli

400 dekatuumaa = 4 000 tuumaa

Esimerkki 3

Matkaa lähimpään saareen on 340 millimeripeninkulmaa. Kuinka monta meripeninkulmaa pitää siis purjehtia?

Tapa 1
Koska milli-etuliitteen kerroin on 0,001, millimeripeninkulma merkitsee 0,001 meripeninkulmaa.

Yhteensä siis 340 · 0,001 mpk = 0,34 mpk.

Tapa 2
Perusyksikkö on tässä tapauksessa meripeninkulma. Jotta päästään milli-kertoimesta perusyksikköön, pilkkua on siirrettävä kolmen pykälän verran vasemmalle:

k kilo	h hehto	da deka	*perusyksikkö* *– ei etuliitettä*	d desi	c sentti	m milli

340 millimeripeninkulmaa = 0,34 mpk

Pikosta teraan

Laajennetaan hieman äsken opittua etuliitteiden taulukkoa. Otetaan taulukkoon mukaan kertoimet biljoonasosasta biljoonaan.

Etuliite ja sen merkki	Kerroin
tera, T	1 000 000 000 000 = 10^{12}
giga, G	1 000 000 000 = 10^{9}
mega, M	1 000 000 = 10^{6}
kilo, k	1 000
hehto, h	100
deka, k	10
desi, d	0,1
sentti, c	0,01
milli, m	0,001
mikro, μ	0,000 001 = 10^{-6}
nano, n	0,000 000 001 = 10^{-9}
piko, p	0,000 000 000 001 = 10^{-12}

Taulukko voidaan esittää myös vaakatasossa:

T tera	G giga	M mega	k kilo	h hehto	da deka	*perus- yksikkö – ei etu- liitettä*	d desi	c sentti	m milli	µ mikro	n nano	p piko

Et välttämättä tarvitse näitä kaikkia jokapäiväisessä elämässäsi, mutta melko usein niihin kuitenkin törmää. Kaverisi on saattanut vaikkapa ostaa uuden tietokoneen, jossa on 3,2 gigahertsin suoritin ja 2 teratavun kovalevy, tai ehkä juuri tänään kahvipöytäkeskusteluissa puhuttiin 400 kilovoltin jännitelinjoista. Koneistajan on pakko osata yksikönmuunnokset.

Esimerkki 4

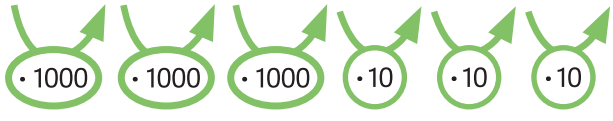
Muuta pyydettyyn yksikköön.

a) Kuinka monta tavua tietoa on 3 Tt:n kiintolevyssä?

Tapa 1
Tietoa on $3 \cdot 1\,000\,000\,000\,000$ tavua eli 3 biljoonaa tavua.

Tapa 2
Katsotaan taulukosta, kuinka monen pykälän verran pilkkua on siirrettävä:

T tera	G giga	M mega	k kilo	h hehto	da deka	*perusyksikkö – ei etuliitettä*	d desi	c sentti	m milli	µ mikro	n nano	p piko



Pilkkua on siirrettävä yhteensä kahdentoista pykälän verran oikealle.

3 Tt = 3 000 000 000 000 t

Esimerkki 5

Muuta pyydettyyn yksikköön.

Suomen valtion budjetti oli vuonna 2014 oli noin 54 030 000 000 euroa. Ilmaise tämä gigaeuroina.

Tapa 1
Yksi gigaeuro on miljardi euroa, joten budjetti oli 54,03 G€.

Tapa 2
Katsotaan taulukosta, kuinka monen pykälän verran pilkkua on siirrettävä, jotta perusyksiköstä päästään gigaan:

T tera	G giga	M mega	k kilo	h hehto	da deka	*perusyksikkö – ei etuliitettä*	d desi	c sentti	m milli	µ mikro	n nano	p piko

Pilkkua on siirrettävä yhteensä yhdeksän pykälän verran vasemmalle.

54 030 000 000 € = 54,03 G €

Esimerkki 6

Muuta pyydettyyn yksikköön.

Maalikerroksen paksuus oli 35 µm. Kuinka monta millimetriä se on?

Tapa 1
Mikrometri on millimetrin tuhannesosa, joten 35 mikrometriä on 35 · 0,001 mm = 0,035 mm.

Tapa 2
Katsotaan taulukosta, kuinka monen pykälän verran pilkkua on siirrettävä, jotta mikrosta päästään milleihin:

T tera	G giga	M mega	k kilo	h hehto	da deka	*perusyksikkö – ei etuliitettä*	d desi	c sentti	m milli	µ mikro	n nano	p piko

Pilkkua on siirrettävä kolmen pykälän verran vasemmalle, joten

35 µm = 0,035 mm.

Tehtäviä

1. Muunna kilowateiksi (kW).

a) 1 400 W = _____ b) 800 W= _____ c) 12 000 W = _____

d) 5 300 W = _____ e) 40 W = _____ f) 360 W = _____

2. Muunna milliampeereiksi (mA).

a) 0,62 A = _____ b) 0,050 A = _____ c) 1,35 A = _____

d) 0,003 A = _____ e) 1,6 A = _____ f) 2,600 A = _____

3. Muunna kiloeuroiksi (k€).

a) 6 000 € = _____ b) 600 € = _____ c) 590 € = _____

d) 12 500 € = _____ e) 4 500 € = _____ f) 150 € = _____

4. Muunna millibaareiksi (mbar).

a) 0,4 bar = _____ b) 0,090 bar = _____ c) 1,4 bar = _____

d) 0,0015 bar = _____ e) 1,4968 bar = _____ f) 0,06641 bar = _____

5. Suodattimiin on usein merkitty suodatuskyky mikroneina eli mikrometreinä. Erääseen suodattimeen jäävät kiinni 50 µm:n ja sitä isommat partikkelit. Kuinka paljon tämä on millimetreinä?

_____

_____

6. Täydennä taulukko.

Kerroin	Etuliite ja sen merkki
0,001	
	mikro, μ
1 000 000	
	nano, n
	giga, g
100	
	deka, da

7. Vanhahkon tietokoneen kovalevy on kooltaan 180 Gt.

a) Kuinka monta kirjoitelmaa tietokoneen muistiin mahtuu, jos jokainen kirjoitelma on kooltaan keskimäärin 18 kt?

b) Kuinka monta hd-tason elokuvaa muistiin mahtuu, jos jokainen elokuva on kooltaan keskimäärin 2 400 Mt?

8. Erään pelikäyttöön tarkoitetun tietokoneen kellotaajuus on 3,9 GHz. Kuinka moninkertainen sen taajuus on verrattuna Suomen vaihtosähköverkon taajuuteen, joka on 50 Hz?

9. Paine ilmoitetaan usein megapascaleina (MPa). Ilmakompressorin letkussa oli varoitus, jonka mukaan paine saa olla korkeintaan 1,2 MPa. Kuinka monta baaria tämä on, jos yksi bar = 100 kPa?

10. Henkilönostimen hydrauliletku oli mitoitettu kestämään jatkuvaa käyttöä 35 MPa:n paineella. Kestääkö letku, kun jatkuva paine järjestelmässä kasvaa paineensäätimen hajoamisen vuoksi 4,6 hehtobaariin?

Pituus

Pituuden perusyksikkö on metri. Kaikki muut kerrannaisyksiköt ovatkin jo tuttuja viime luvun perusteella:

km kilometri	hm hehtometri	dam dekametri	m metri	dm desimetri	cm senttimetri	mm millimetri

Pituus on yksiulotteinen suure, joten sen suhdeluku muunnoksissa on 10. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että jokaisessa muutoksessa vierekkäisestä yksiköstä toiseen pilkku siirtyy samaan suuntaan yhden pykälän verran. Tuntuuko hankalalta? Seuraavat esimerkit valaisevat asian.

Esimerkki 7

Muunna 2,4 cm millimetreiksi.

Katso taulukkoa. Huomaat, että millimetrit ovat yhden pykälän päässä senttimetreistä oikealle. Siirretään siis pilkkuakin yhden pykälän verran oikealle:

km kilometri	hm hehtometri	dam dekametri	m metri	dm desimetri	cm senttimetri	mm millimetri

2,4 cm = 24 mm

Esimerkki 8

Muunna 3 m kilometreiksi.

Jotta metreistä päästään kilometreihin, pilkkua on siirrettävä kolmen pykälän verran vasemmalle. (Pilkkuhan on kokonaisluvun perässä, vaikkei sitä sinne merkitäkään!)

km kilometri	hm hehtometri	dam dekametri	m metri	dm desimetri	cm senttimetri	mm millimetri

3 m = 0,003 km

Käytännön työelämässä on hyvä osata ulkoa yleisimmät mittayksiköiden muunnokset. Jokaisen kone- ja tuotantotekniikan alalla työskentelevän on kyettävä muuttamaan millimetrit senttimetreiksi ja metrit senteiksi silmänräpäyksessä, ilman kulmien kurtistelua. Käytännön tilanteita helpottaa, jos muistaa seuraavan taulukon sisällön:

Työsalin huoneentaulu

1 km = 1 000 m
1 m = 100 cm = 1 000 mm
1 cm = 10 mm

Tehtäviä

1. Arvioi seuraavien asioiden pituutta. Voit myös tarkistaa arviosi mittaamalla tai tarkistamalla karttapalvelusta.

Asia	Arvio	Mitattu arvo
Pulpetin leveys		
Luokan leveys		
Matkapuhelimen mitat (pituus, leveys, korkeus)		
Etäisyys Oulusta Kokkolaan		
Etäisyys Tampereelta Lieksaan		
Kynän pituus		
Pääsi ympärysmitta		

2. Valitse sopiva yksikkö kuhunkin kohtaan.

a) Naulan pituus on 100 _____ b) Metallisorvin kärkiväli on 1 _____

c) Auton pituus on 4 500 _____ d) Huonekorkeus on 25 _____

e) Siltarummun halkaisija on 25 _____ f) Kitaran kielen pituus on 100 _____

3. Muunna senttimetrit metreiksi.

a) 150 cm = _____ b) 80 cm = _____ c) 250 cm = _____

d) 40 cm = _____ e) 5 cm = _____ f) 1 cm = _____

4. Muunna millimetrit senttimetreiksi.

a) 16 mm = _____ b) 50 mm = _____ c) 2,50 mm = _____

d) 400 mm = _____ e) 1 500 mm = _____ f) 0,1 mm = _____

5. Olet ostamassa teräspalkkia projektiisi. Velmu metallinmyyjä ilmoittaa palkin hinnaksi 0,12 euroa 10 milliltä. Kuinka paljon maksaa 6 metrin palkki?

_____

Massa

Massan perusyksikkö on gramma. Kaikki muut kerrannaisyksiköt ovatkin jo tuttuja viime luvun perusteella:

kg kilo- gramma	hg hehto- gramma	dag deka- gramma	g gramma	dg desi- gramma	cg sentti- gramma	mg milli- gramma

Massa on yksiulotteinen suure, joten sen suhdeluku muunnoksissa on 10. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että jokaisessa muutoksessa vierekkäisestä yksiköstä toiseen pilkku siirtyy samaan suuntaan yhden pykälän verran.

Katso tarkasti oheisia esimerkkejä: yksikkömuunnokset tapahtuvat täsmälleen samalla tavalla kuin pituudessakin. Nyt vain metrin tilalla on gramma.

Esimerkki 9

Muunna 2 400 g kilogrammoiksi.

Katso taulukkoa. Huomaat, että kilogrammat ovat kolmen pykälän päässä vasemmalle grammoista. Pilkkua on siis siirrettävä kolmen pykälän verran vasemmalle:

kg kilo- gramma	hg hehto- gramma	dag deka- gramma	g gramma	dg desi- gramma	cg sentti- gramma	mg milli- gramma

:10 :10 :10

2 400 g = 2,4 kg

Esimerkki 10

Muunna 350,5 mg grammoiksi.

Jotta milligrammoista päästään grammoihin, pilkkua on siirrettävä kolmen pykälän verran vasemmalle:

kg kilo- gramma	hg hehto- gramma	dag deka- gramma	g gramma	dg desi- gramma	cg sentti- gramma	mg milli- gramma

:10 :10 :10

350,5 mg = 0,3505 g

Esimerkki 11

Muunna 56 hg senttigrammoiksi.

Jotta hehtogrammoista päästään senttigrammoihin, pilkkua on siirrettävä neljän pykälän verran oikealle:

kg kilo- gramma	hg hehto- gramma	dag deka- gramma	g gramma	dg desi- gramma	cg sentti- gramma	mg milli- gramma

·10 ·10 ·10 ·10

56 hg = 560 000 cg

Käytännön työelämässä on hyvä osata ulkoa yleisimmät massayksiköiden muunnokset. Oheinen taulu on hyvä painaa pysyvästi muistiin. Mukana on myös yleisesti käytetty tonni, josta käytetään epävirallisia lyhenteitä ”t” ja ”tn”.

Työsalin huoneentaulu

1 tn = 1 000 kg
1 kg = 1 000 g
1 g = 0,001 kg
1 g = 1 000 mg

Tehtäviä

1. Arvioi seuraavien tavaroiden massa. Voit mahdollisesti myös punnita osan tavaroista arviointisi jälkeen.

Tavara	Arvioitu massa	Punnittu massa
Yksi 4 tuuman naula		
Tyhjä 33 cl:n alumiinitölkki		
Matkapuhelin		
Pistokärkinen teräslapio		
1 m:n pätkä 20 mm:n teräsakselia		
Tyhjä kahvikuppi		
Kottikärryt		

2. Muunna grammat kilogrammoiksi.

a) 150 g = _____ b) 80 g = _____ c) 250 g = _____

d) 1 440 g = _____ e) 45 500 g = _____ f) 51 g = _____

3. Muunna kilogrammat grammoiksi.

a) 16 kg = _____ b) 5 kg = _____ c) 0,45 kg = _____

d) 0,050 kg = _____ e) 1,56 kg = _____ f) 3,25 kg = _____

4. Muunna grammat milligrammoiksi.

a) 5,6 g = _____ b) 0,63 g = _____ c) 7 g = _____

d) 0,050 g = _____ e) 0,4 g = _____ f) 5 g = _____

5. Muunna kilogrammat tonneiksi.

a) 15 000 kg = _____ b) 865 kg = _____ c) 4 900 kg = _____

d) 50 kg = _____ e) 1 600 kg = _____ f) 120 000 kg = _____

6. Muunna pyydettyyn yksikköön.

a) 160 cg = _____ dg b) 8,65 kg = _____ g c) 49 hg = _____ kg

d) 126 mg = _____ cg e) 56,4 dag = _____ g f) 5 g = _____ tn

7. Auton jarruttoman peräkärryn kantavuus on 350 kg. Montako 800 g:n käämilankakelaa voit lastata kärryysi kantavuuden rajoissa?

_____

_____

8. Henkilönostimeen saa ottaa kuormaa 0,340 tonnia. Montako perusketterää (m = 80 kg) koneistajaa voi tulla kyytiin?

_____

_____

Vetomitat

Vetomittojen perusyksikkö on litra. Muunnoksiin tarvittava taulukko on jo melkoisen tuttu edellisiltä sivuilta:

kl kilolitra	hl hehtolitra	dal dekalitra	l litra	dl desilitra	cl senttilitra	ml millilitra

Yksikkömuunnosten tekninen toteutus on jälleen täysin sama kuin pituuden ja massankin kanssa, kuten voit huomata seuraavista esimerkeistä.

Esimerkki 12

Muunna 15 senttilitraa litroiksi.

Jotta päästään litroihin, pilkkua on siirrettävä kahden pykälän verran vasemmalle:

kl kilolitra	hl hehtolitra	dal dekalitra	l litra	dl desilitra	cl senttilitra	ml millilitra

15 cl = 0,15 l

Esimerkki 13

Muunna 14,5 litraa millilitroiksi.

Jotta päästään millilitroihin, pilkkua on siirrettävä kolmen pykälän verran oikealle:

kl kilolitra	hl hehtolitra	dal dekalitra	l litra	dl desilitra	cl senttilitra	ml millilitra

14,5 l = 14 500 ml

Seuraavan taulun muunnokset tulee muistaa ulkoa salamannopeasti.

Työsalin huoneentaulu

1 l = 10 dl = 100 cl
1 l = 1 000 ml
1 cl = 10 ml

Tehtäviä

1. Arvioi seuraavien asioiden tilavuus sopivalla yksiköllä:

Asia	Arvioitu tilavuus
Työkalupakki	
Henkilöauton moottoriöljyn määrä	
Kahvikuppi	
Lääkeruisku	
Mopon iskutilavuus	
Pesäpallo	

2. Muunna litroiksi.

a) 5,6 dl = _____ b) 5 600 ml = _____ c) 12 cl = _____

d) 0,5 dl = _____ e) 15 ml = _____ f) 1 ml = _____

3. Muunna desilitroiksi.

a) 15,6 l = _____ b) 560 ml= _____ c) 1,0 l = _____

d) 150 cl = _____ e) 80 ml = _____ f) 50 dal = _____

4. Muunna millilitroiksi.

a) 0,5 l = _____ b) 50 dl = _____ c) 1,0 l = _____

d) 75 cl = _____ e) 150 l = _____ f) 0,006 l = _____

5. Konehallin tilavuus on yhteensä 2 000 kuutiometriä eli 2 000 000 litraa. Montako vuorokautta ihminen voi hengittää kyseisessä tilassa, jos minuutissa ilmaa kuluu 60 litraa? Oletetaan, että ihminen pystyy hengittämään tietyn ilmamäärän vain kerran ja että kertaalleen hengitetty ilma ei sekoitu hengittämättömän ilman kanssa.

_____

_____

6. V8-moottori on käynnissä edellisen tehtävän konehallissa. Kone tarvitsee ilmaa 450 litraa sekunnissa. Kuinka kauan (tunteina ja minuutteina) kone pysyy käynnissä, jos oletetaan, että halli on tiivis?

_____

_____

_____

7. Hydrauliöljyn virtausnopeus on 38 litraa minuutissa. Kuinka kauan kestää hydrauli-sylinterin täysi liike, kun sillä on tilavuutta 450 millilitraa?

_____

_____

_____

Pinta-alan yksiköt

Pinta-alan yksikkö muodostuu käytettävästä pituuden yksiköstä korotettuna toiseen potenssiin. Kun valittu yksikkö korotetaan toiseen potenssiin, yksikön etuliitteeksi tulee ”neliö”.

Pinta-alamerkintöjä joutuu toisinaan muuntamaan joko isommiksi tai pienemmiksi. Esimerkiksi tonttien pinta-alat voidaan ilmoittaa sekä hehtaareina että neliömetreinä.

Pinta-alan muunnoksissa täytyy muistaa, että jokaisessa muutoksessa vierekkäisestä yksiköstä toiseen pilkku liikkuu kahden pykälän verran. Alla olevan taulukon avulla muuntaminen onnistuu helposti.

km^2 neliökilometri	hm^2 = ha *neliöhehtometri* = hehtaari	dam^2 = a *neliödekametri* = aari	m^2 neliömetri = ”neliö”	dm^2 neliödesimetri	cm^2 neliösenttimetri	mm^2 neliömillimetri

Työsalin huoneentaulu

Neliömetri on kooltaan 1 m x 1 m.
Aari on kooltaan 100 m^2 (10 m x 10 m).
Hehtaari on kooltaan 10 000 m^2 (100 m x 100 m).

Esimerkki 14

Järven pinta-ala 40 km^2. Kuinka monta hehtaaria se on?

40 km^2 · 100 = 4 000 ha

km^2	ha	a	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

· 100

Esimerkki 15

Peltoa on 0,2 ha. Kuinka monta aaria se on?

Nyt aarit ovat pykälän verran hehtaareista oikealle. Siirretään siis pilkkua kahden pykälän verran oikealle:

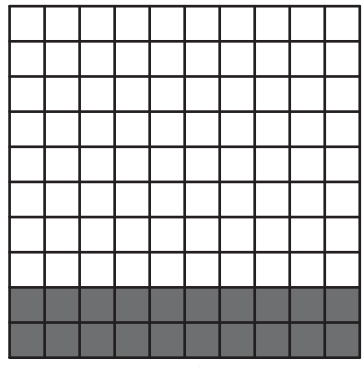
0,2 ha = 20 a.

km^2	ha	a	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

· 100

(pilkku siirtyy kahden pykälän verran)

Kuvassa havainnollistetaan hehtaarin suhdetta aariin.

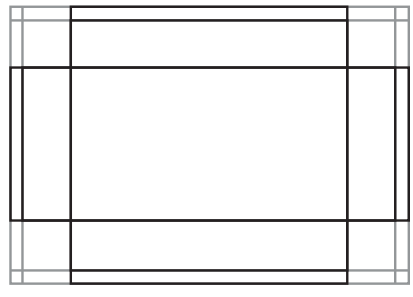


0,2 ha

Esimerkki 16

Kuinka paljon tarvitaan metallilevyä, jos halutaan valmistaa suorakulmaisen särmiön muotoinen allas, jonka pitempi sivu on 500 mm ja lyhempi sivu 250 mm ja jonka laidan korkeus on 50 mm?

Särmäysvaran pitää olla 5 mm. Ylijäävät laidat taitetaan tukemaan rakennetta.



Pitempi sivu laitoineen ja särmäysvaroineen on

500 mm + 55 mm + 55 mm = 610 mm.

Lyhempi sivu laitoineen ja särmäysvaroineen on

250 mm + 55 mm + 55 mm = 360 mm.

Metallilevyä tarvitaan pala, jonka koko on 610 mm x 360 mm.

Palan pinta-alaksi saadaan tällöin

$610\ mm \cdot 360\ mm = 219\ 600\ mm^2 \approx 220\ 000\ mm^2 = 0{,}22\ m^2$.

Vastaus: Metallilevyä tarvitaan 0,22 neliömetriä.

Puhekielessä neliöllä tarkoitetaan samaa kuin 1 m^2.

Tehtäviä

1. Mikä yksikkö sopii luvun perään?

Esineet ja tarvikkeet:

a) Pöydän pinta-ala on 1,2 _____ b) Ikkunan koko on 1,68 _____

c) Lattiavahan menekki yhdellä vahauksella on 1 l / 29 _____

d) Erään sähköjohdon poikkipinta-ala on 1,5 _____

Rakennusten pinta-alat:

a) Kerrostalokaksion pinta-ala on 58 ____ b) Autotallin pinta-ala on 24 ____

c) Yrityksen varaston pinta-ala on 1 200 ____ d) Satamaterminaalin pinta-ala on 1,5 ____

2. Ilmoita seuraavat mittaustulokset sopivalla tarkkuudella:

a) Huoneen pinta-ala on 18,5327 m^2.

_____

b) Pöydän leveys on 80,245 cm.

_____

c) Teräsverkko painaa 63,164 kg.

_____

d) Saunan tilavuus on 20,6954 m^3.

_____

e) Metallilankaa tarvitaan 88,57 m.

_____

f) Johtimen poikkipinta-ala on 2,5124 mm^2.

_____

3. Kuinka paljon tarvitset metallilevyä päällystääksesi pöydän pinnan, jonka mitat ovat seuraavat: leveys 800 mm, pituus 2 500 mm ja paksuus 30 mm? Levy taitetaan myös pöydän reunoille.

_____

_____

4. Arvioi seuraavat pinta-alat.

Kohde	Arvio pinta-alasta	Laskettu pinta-ala
Pulpetti		
A4-kopiopaperi		
Verstaan työpöytä		
Kaasupullojen säilytystila		
Aineslangan poikkipinta-ala		
Kännykän näyttö		
Jonkin metallilevyn pinta-ala		

5. Muunna seuraavat luvut pienemmiksi yksiköiksi:

1 m^2	cm^2	mm^2
10 m^2	cm^2	mm^2
100 m^2	cm^2	mm^2
0,5 m^2	cm^2	mm^2
0,25 m^2	cm^2	mm^2
0,05 m^2	cm^2	mm^2

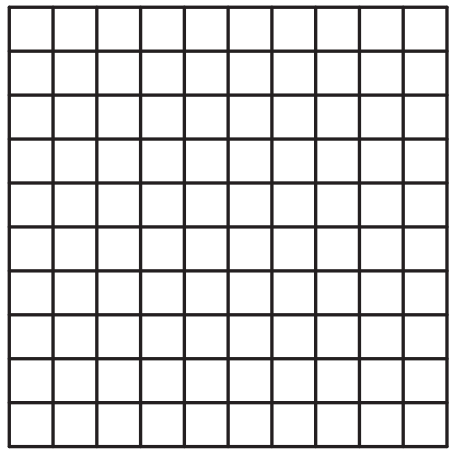
6. Muunna seuraavat luvut pienemmiksi yksiköiksi:

0,025 m^2	cm^2	mm^2
0,008 m^2	cm^2	mm^2
0,06 m^2	cm^2	mm^2
0,9 m^2	cm^2	mm^2
0,0007 m^2	cm^2	mm^2
0,07 m^2	cm^2	mm^2

7. Muunna seuraavat luvut suuremmiksi yksiköiksi:

1 000 mm^2	cm^2	mm^2
100 mm^2	cm^2	m^2
10 000 mm^2	cm^2	m^2
900 mm^2	cm^2	m^2
50 000 mm^2	cm^2	m^2
45 000 000 mm^2	cm^2	m^2
2 mm^2	cm^2	m^2
68 250 mm^2	cm^2	m^2
540 125 mm^2	cm^2	m^2
3 850 mm^2	cm^2	m^2
52 mm^2	cm^2	m^2
690 mm^2	cm^2	m^2

8. Pituudessa yksiköiden välinen kerroin on kymmenen. Selitä ruudukon avulla, miksi pinta-alojen yksiköiden välinen kerroin on 100.



Tilavuuden yksiköt

Tilavuuden yksikkö muodostuu käytettävästä pituuden yksiköstä korotettuna kolmanteen potenssiin. Potenssiin korotettava yksikkö voi olla esimerkiksi metri (m), millimetri (mm) tai senttimetri (cm).

Kun valittu yksikkö korotetaan kolmanteen potenssiin, yksikön etuliitteeksi tulee ”kuutio”, esimerkiksi **kuutio**metri (m^3), **kuutio**millimetri (mm^3) tai **kuutio**senttimetri (cm^3).

Yleensä arkikielessä ei käytetä kuutiollisia mittoja vaan niin sanottuja vetomittoja, erityisesti litroja, desilitroja, senttilitroja ja millilitroja.

Työsalin huoneentaulu

Kuutio eli kuutiometri on kooltaan 1 m x 1 m x 1 m = 1 000 litraa.
Kuutiodesimetri on kooltaan 10 cm x 10 cm x 10 cm = 1 litra.

m^3 kuutiometri = ”**kuutio**” = 1 000 litraa			dm^3 kuutio-desimeri = 1 litra			cm^3 kuutio-senttimetri			mm^3 kuutio-millimetri

· 1000

*(pilkkua siirretään **kolmen pykälän verran** oikealle)*

kl kilolitra = 1 000 litraa	hl hehto-litra	dal deka-litra	l litra = kuutio-desimetri	dl desi-litra	cl sentti-litra	ml millilitra

· 10

*(pilkkua siirretään **yhden pykälän verran** oikealle)*

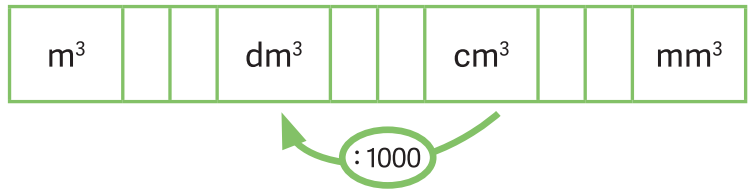
Huomaathan, että 1 litra on sama kuin 1 dm^3.

Laskuesimerkkejä

1. Auton moottorin tilavuus on 1 995 cm^3. Kuinka paljon se on litroina?

Muunnetaan tilavuus ensin kuutiodesimetreiksi:

1 995 cm^3 : 1 000 = 1,995 dm^3



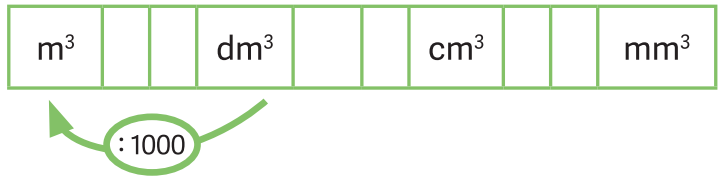
1 dm^3 = 1 litra, joten

1,995 dm^3 = **1,995 litraa**

2. Jääkaapin koko on 400 l. Kuinka paljon se on kuutiometreinä?

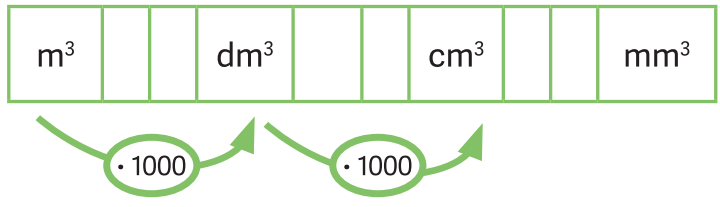
1 litra = 1 dm^3, joten 400 l = 400 dm^3

400 dm^3 : 1 000 = **0,4 m^3**



3. Kuinka monta kuutiosenttimetriä 0,5 ”kuutiota” on?

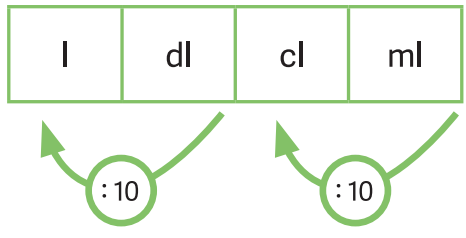
0,5 m^3 · 1 000 = 500 dm^3
500 dm^3 · 1 000 = **500 000 cm^3**



4. Kuinka monta kuutiosenttimetriä on 120 cl?

Muutetaan ensin litroiksi:

120 cl : 10 = 12 dl
12 dl : 10 = 1,2 l

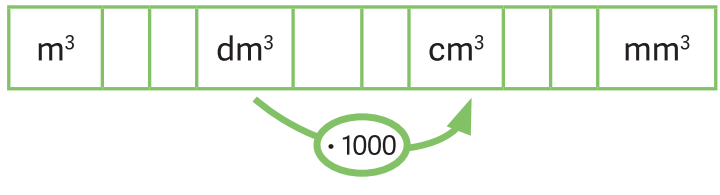


Muutetaan litrat sitten kuutiodesimetreiksi:

1,2 l = 1,2 dm^3

Muutetaan kuutiodesimetrit lopuksi kuutiosenttimetreiksi:

1,2 dm^3 · 1 000 = **1 200 cm^3**



Tehtäviä

1. Arvioi seuraavien asioiden tilavuudet:

a) Juomalasi: _____ dl = _____ cm^3

b) 15 metriä pitkä mänty: _____ m^3 = _____ litraa

c) Kottikärry: _____ litraa = _____ m^3

d) Tiili: _____ litraa = _____ dm^3

2. Muunna seuraavat luvut pienempään yksikköön:

1 m^3	dm^3	cm^3
0,1 m^3	dm^3	cm^3
0,01 m^3	dm^3	cm^3
0,001 m^3	dm^3	cm^3
5 m^3	dm^3	cm^3
0,5 m^3	dm^3	cm^3

0,05 m^3	dm^3	cm^3
0,005 m^3	dm^3	cm^3
2,5 m^3	dm^3	cm^3
0,25 m^3	dm^3	cm^3
0,025 m^3	dm^3	cm^3

3. Mikä yksikkö sopii luvun perään? (Ensimmäinen kohta on tehty malliksi.)

a) Perunakattilan koko on noin 2 *litraa* eli 2 ***kuutio****desimetriä*.

b) Mopon moottorin iskutilavuus on noin 0,5 *desilitraa* eli 50 ***kuutio*** _____.

c) 80 kg painavan ihmisen tilavuus on noin 80 *litraa* eli 80 ***kuutio*** _____.

d) Kerrostalokaksion tilavuus on 130 000 *litraa* eli 130 ***kuutio*** _____.

e) Arpakuution tilavuus on 1 *millilitraa* eli 1 ***kuutio*** _____.

f) Ison virvoitusjuomapullon tilavuus on 15 _____ eli 1 500 ***kuutio*** _____.

4. Muunna seuraavat luvut suurempaan yksikköön

1 000 cm^3	dm^3	m^3
100 cm^3	dm^3	m^3
100 000 cm^3	dm^3	m^3
1 cm^3	dm^3	m^3
5 000 000 cm^3	dm^3	m^3
5 000 cm^3	dm^3	m^3
2 500 cm^3	dm^3	m^3
250 000 cm^3	dm^3	m^3
250 cm^3	dm^3	m^3
1 295 cm^3	dm^3	m^3
2 000 000 cm^3	dm^3	m^3

5. Kuinka monta kuutiosenttimetriä mahtuu yhteen kuutiodesimetriin? Perustele vastauksesi.

Yksiköiden yhdistäminen ja tuuma

Monet suureet ilmoitetaan jotain yksikköä kohden olevina arvoina. Esimerkiksi hinta voidaan ilmoittaa yksikkönä €/kpl, €/kg, €/litra, €/tunti tai muuna vastaavana merkintänä. Merkintä 3 €/litra tarkoittaa, että yksi litra maksaa 3 euroa.

Esimerkki 17

Terästangon pituus on 12 metriä, ja se painaa 20 kg. Anna terästangon paino yksikkönä kg/m. Selitä sanallisesti, mitä vastaus tarkoittaa.

Ratkaisu:

Haluttu yksikkö kg/m saadaan, kun massa jaetaan pituudella:

$$\frac{20\ \text{kg}}{12\ \text{m}} = 1{,}66\ldots\ \text{kg/m} \approx 1{,}7\ \text{kg/m}.$$

Vastaus: Yksi metri terästankoa painaa noin 1,7 kg.

Tehtäviä

1. Tomin palkka on 19,00 €/h. Kirjoita sanallisesti, mitä merkintä tarkoittaa.

2. Sähkömoottorimainoksessa on merkintä 3 000 rpm. Kirjoita sanallisesti, mitä merkinnällä tarkoitetaan.

3. Alumiinilla, kuparilla ja kullalla on erilainen tiheys. Näiden aineiden tiheydet on ilmoitettu alla:

Al: 2 700 kg/m^3 Cu: 960 kg/m^3 Au: 19 300 kg/m^3

a) Kirjoita sanallisesti, mitä merkintä tarkoittaa esimerkiksi kuparin tapauksessa.

b) Kuinka monta kuutiometriä alumiinia pitäisi olla, jotta se painaisi yhtä paljon kuin yksi kuutiometri kultaa?

c) Kumpi painaa enemmän: yksi kilogramma alumiinia vai yksi kilogramma kuparia?

4. Terästyypeille on määritetty myötölujuus, joka kuvaa teräksen kykyä säilyttää muotonsa rasituksessa. Esimerkiksi teräksien niittaukseen käytettävän niitin on kestettävä kovaa rasitusta.

Myötölujuus tarkoittaa sitä voiman määrää, jolloin alkaa tapahtua merkittävää plastista muodonmuutosta. Tässä tapauksessa teräksen myötölujuus pettää 344 N/mm^2:n jälkeen. Määritys tehdään yksinkertaistetusti seuraavan koejärjestelyn avulla:

Aluksi terässylinterin poikkipinta-ala mitataan (yksikkönä mm^2). Seuraavaksi kappaletta venytetään voimalla *F*, kunnes kappale ei enää kestä venytystä (voiman yksikkö N = Newton). Lopuksi voima *F* jaetaan pinta-alalla.

Talonrakennuksessa käytettävän teräksen myötölujuus on 344 N/mm^2. Kirjoita sanallisesti, mitä merkinnällä tarkoitetaan.

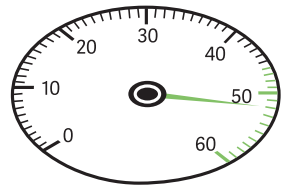
5. Laboratoriossa mitattiin terässauvan poikkipinta-alaksi 10 mm^2. Terässauvaa venytettiin 2 300 N:n voimalla, mutta sauva kesti venytyksen. Laske, kuinka suuri myötölujuus teräslaadulla ainakin oli. Ilmoita tulos yksikkönä N/mm^2.

6. Ikkunan energiatehokkuutta kuvataan E-arvolla, joka kuvaa ikkunan läpi karkaavan lämpöenergian määrää. Eräässä energiatehokkaassa ikkunassa E-arvo on 45 kWh/m^2/a. Yksikkö kWh (kilowattitunti) on energian yksikkö ja yksikkölyhenne a on vuosi (annual). Kirjoita sanallisesti, mitä energiatehokkuuslukema tarkoittaa.

7. Eräs sähköyhtiö veloittaa sähköstä 5,5 snt/kWh. Kuinka monta euroa sähköenergia maksaa, jos sähköä kulutetaan 1 000 kWh?

8. Auton kulutus ilmoitetaan usein muodossa litraa / 100 km. Eräs hybridiauto kulutti 53 litraa bensiiniä 1 450 kilometrin matkalla. Laske auton kulutus yksikkönä litraa / 100 km.

9. Autojen kojelaudassa on yleensä moottorin kierroslukumittari. Oheisessa kuvassa kierroslukumittarin yksikkö on 1/min x 100.



a) Mikä on moottorin kierrosnopeus yksikkönä 1/min? (*eli yksikkönä rpm*)

b) Mikä on kierrosnopeus yksikkönä 1/s?

10. Erään terästyypin myötölujuuden ilmoitettiin olevan 355 N/mm^2.

a) Kuinka suuren venyttävän voiman pitäisi kestää terästanko, jonka poikkipinta-ala on 2 cm^2?

b) Maan pinnan läheisyydessä 1 kg:n suuruinen kappale aiheuttaa 10 N:n suuruisen vetovoiman. Kuinka suurta massaa voisi a)-kohdan terästangolla periaatteessa nostaa?

11. ”Lastuavalla työstöllä tarkoitetaan kappaleiden valmistamista lastuavilla työstömenetelmillä, kuten sorvaamalla, jyrsimällä tai poraamalla. Lastuttaessa aihiosta poistetaan ainetta lastuina, kunnes jäljellä on vain halutun muotoinen kappale - -.

- - Lastuavan työstön keskeisiä käsitteitä ovat lastuamisarvot. Näistä tärkeimmät ovat lastuamisnopeus, syöttö ja lastuamissyvyys. Lastuamisnopeus määräytyy päätyöstöliikkeen nopeuden mukaan, syöttö syöttöliikkeen nopeuden mukaan ja lastuamissyvyys asetuksien, työkalun koon tai asetusliikkeiden mukaan.”

(Lähde: https://fi.wikipedia.org/wiki/Lastuava_työstö.)

Eräässä metallialan yrityksessä sorvattiin lentokoneen peräsimen kiinnityspultteja. Materiaalina käytettiin ruostumatonta terästä (RST), jonka lastuamisnopeus on välillä 80–200 m/mm kovametalliterällä. Kokemus oli osoittanut parhaaksi lastuamisnopeudeksi 160 m/mm.

Terästä sorvattiin lastuamisnopeudella 160 m/min.

a) Kuinka monta metriä lastua syntyy 2 minuutissa, jos oletetaan terän työstävän kappaletta koko sen ajan?

b) Kuinka monta metriä lastua syntyy 1 sekunnissa?

Tuuma, englanniksi inch, on pituusyksikkö, jota käytetään joskus rakentamiseen liittyvissä mitoissa. Tuuma lyhennetään joko kirjainparilla in (esim. 6 in) tai lainausmerkeillä" (esim. 6"). Tuumaa käytetään ainakin seuraavissa asioissa:

1. naulojen pituus, esimerkiksi "neljän tuuman naula"
2. sahatavaran mittojen kutsumanimet, esimerkiksi "kakkosnelonen" noin 2 tuumaa paksu ja noin 4 tuumaa leveä lankku
3. esimerkiksi "neljän tuuman näyttö" = näyttö, jonka lävistäjä on 4 tuumaa
4. autojen vannekoko, esimerkiksi 15 tuuman vanne
5. housujen vyötärön koko, esimerkiksi housujen vyötärön ympärys 27"

Yksi tuuma on 2,54 senttimetriä.

12. Alla olevassa taulukossa on eräitä teräsputkikokoja. Kuinka paljon seuraavat mitat ovat millimetreinä?

a) 1" _____ b) 2" _____

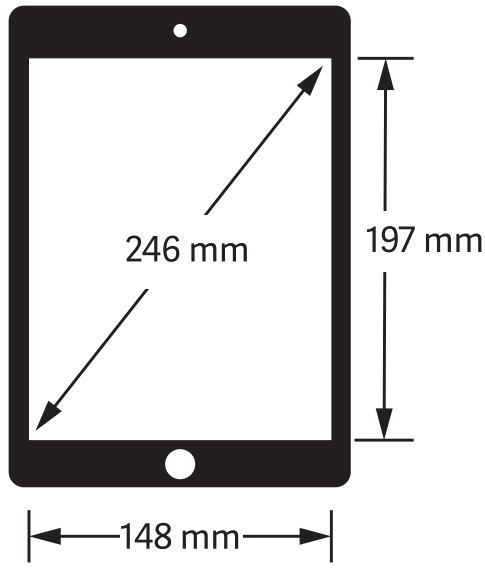
c) 4" _____

(Lähde: http://www.elmemetall.fi/teras-ja-ainesputket.)

Hitsatut kierteittävät sinkityt putket				
NS	**Tuuma**	**Ulkoh. (mm)**	**Seinämä (mm)**	**kg/m**
10	3/8	17,20	2,35	0,91
15	1/2	21,30	2,65	1,30
20	3/4	26,90	2,65	1,69
25	1	33,70	3,25	2,61
32	11/4	42,40	3,25	3,36
40	1½	48,30	3,25	3,87
50	2	60,30	3,65	5,48
65	2½	76,10	3,65	7,03
80	3	88,90	4,05	9,16
100	4	114,30	4,50	13,14

13. Kuinka monta senttimetriä pitkä on kolmen tuuman naula?

14. Oheisessa kuvassa on Mirjamin tablettitietokone. Mainoksessa ilmoitetaan näytön kooksi 9,7". Mirjami teki kauppaan valituksen, koska ei uskonut näytön olevan oikean kokoinen. Osoita Mirjamille, että mainoksessa ollut tieto piti paikkansa.



Ajan yksiköt

Ajan yksiköt eivät noudata suhdelukuja 10, 100 tai 1 000, vaan ajan yksikkömuunnoksissa käytetään tarvittavan muunnoksen mukaan erilaisia suhdelukuja.

Ajan yksiköiden tunnukset ovat seuraavat:

Yksikkö	Tunnus
vuosi	a
vuorokausi	d, vrk
tunti	h
minuutti	min
sekunti	s

Ajan yksiköiden väliset suhdeluvut ovat seuraavat:

1 a = 365 d

1 d = 24 h

1 h = 60 min

1 min = 60 s

Kun muunnetaan ajan yksikköä suuremmasta pienempään, käytetään suhdelukua kertojana.

Esimerkki 18

Muunna

a) 3 h minuuteiksi

b) 45 min sekunneiksi.

Ratkaisu:

a) $3\ \text{h} = 3 \cdot 60\ \text{min} = 180\ \text{min}$

b) $45\ \text{min} = 45 \cdot 60\ \text{s} = 2\,700\ \text{s}$

Kun muunnetaan ajan yksikköä pienemmästä suurempaan, käytetään suhdelukua jakajana.

Esimerkki 19

Muunna

a) 36 h vuorokausiksi

b) 98 min tunneiksi ja minuuteiksi.

Ratkaisu:

a) $36\ \text{h} = 36 : 24 = 1{,}5\ \text{d}$

b) $98\ \text{min} = 98 : 60\ \text{min} \approx 1{,}63\ \text{h}$

Tehtävä b voidaan ratkaista loppuun kahdella tavalla:

Tapa 1
98 min – 60 min = 38 min
eli 1,63 h = 1 h 38 min

Tapa 2
Ratkaistaan, kuinka paljon on 0,63 h minuutteina kertomalla tämä luku 60:llä:
$0{,}63 \cdot 60\ \text{min} \approx 38\ \text{min}$
eli 1,63 h = 1 h 38 min

Esimerkki 20

Tuisku tekee 5 h 50 min töitä. Hänen tuntipalkkansa on 12,00 €/h. Kuinka paljon hän saa työsuorituksesta palkkaa?

Ratkaisu:

$5\ \text{h}\ 50\ \text{min} = 5 \cdot 60\ \text{min} + 50\ \text{min}$

$= 350\ \text{min}$

$= 350 : 60\ \text{h} = 5{,}833\ldots\ \text{h}$

$5{,}833\ldots\ \text{h} \cdot 12\ €/\text{h} = 69{,}996\ € \approx 70\ €.$

Vastaus: Tuisku saa palkkaa työsuorituksestaan 70 euroa.

Tehtäviä

1. Arvioi, kuinka kauan kestää...

a) junamatka Helsingistä Ouluun: _____ h

b) lentomatka Helsingistä Kööpenhaminaan: _____ h

c) 100 metrin matka autolla, jonka nopeus on 100 km/h: _____ s

d) keskimääräinen suomalainen työviikko: _____ h

e) yksi päivä: _____ s

f) pyöräillä 5 km:n työmatka (nopeus on 20 km/h): _____ min

g) pikajuoksijalla juosta 100 metrin matka: _____ s

h) sinulla kävellä koulun ympäri: _____ min

i) sinulla juosta koulun ympäri: _____ min

2. Tee seuraavat ajan yksikönmuunnokset:

a) 3 a = _____ d b) 2,6 a = _____ d c) 5 d = _____ h

d) 3,8 d = _____ h e) 0,4 d = _____ h f) 2 h = _____ min

g) 6,8 h = _____ min h) 10 min = _____ s i) 70 min = _____ s

3. Tee seuraavat ajan yksikönmuunnokset.

a) 730 d = _____ a b) 73 d = _____ a c) 120 h = _____ d

d) 60 h = _____ d e) 300 min = _____ h f) 45 min = _____ h

g) 100 s = _____ min h) 800 s = _____ min i) 0,6 min _____ s

4. Tee seuraavat ajan yksikönmuunnokset.

a) 3,8 a = _____ a _____ d b) 5,5 d = _____ d _____ h

c) 400 min = _____ h _____ min d) 75 h = _____ d _____ h

e) 7,8 h = _____ h _____ min f) 1 600 s = _____ min _____ s

5. Martin työpäivä kestää 8,4 h. Kuinka paljon se on tunteina ja minuutteina?

6. Mikko on vuodessa töissä 1 638 h. Kuinka paljon se on vuorokausina?

7. Kuinka monta työtuntia Tiinalle kertyy viikossa, kun hänen työaikansa ovat seuraavat?

ma	ti	ke	to	pe
8.15–14.00	9.00–15.00	9.30–16.00	8.45–16.30	7.45–14.15

8. Niilon on oltava töissä klo 7.50. Häneltä kuluu aamutoimiin aikaa yhteensä 38 minuuttia. Lisäksi häneltä kuluu työmatkaan 24 minuuttia. Mihin aikaan Niilon on herättävä?

9. Pinjan työpäivä alkaa klo 7.50 ja kestää 6,8 tuntia. Mihin aikaan hänen työpäivänsä päättyy?

10. Anteron työajat ovat seuraavat:

ma	ti	ke	to	pe
6.50–14.30	5.50–14.00	7.00–15.00	6.50–13.45	6.30–15.45

a) Kuinka monta tuntia viikossa Antero on töissä?

b) Kuinka paljon Antero saa viikolta palkkaa, kun hänen tuntipalkkansa on 14,00 €? Ota huomioon, että Anterolla on joka päivä 60 minuutin ruokatunti, jolta hän ei saa palkkaa.

11. Kuinka paljon matkaan on varattava aikaa, kun keskinopeus on 80 km/h ja matkan pituus on 180 km? Anna vastaus tunteina ja minuutteina.

12. Tehtaassa valmistuu yksi tuote ajassa 5 min 35 s. Kuinka monta tuotetta valmistui 7 tunnin aikana?

13. Ruostumattoman teräksen lastuamisnopeus on 10–20 m/min pikateräksisellä poranterällä. Valitset poraukseen kokemukseen perustuen lastuamisnopeudeksi 15 m/min. Minkä kierrosluvun valitset halkaisijaltaan 10 mm:n poranterälle?

Kierrosluvun kaava on seuraava: $n = \frac{V_C \cdot 1000}{3{,}14 \cdot D_C}$

Kaavassa

n = kierrosnopeus (rpm)

V_C = lastuamisnopeus (m/min)

D_C = poranterän halkaisija (mm).

14. Kampiakselin pyörimisnopeus on 3 600 1/min (3 600 kierrosta minuutissa). Kuinka monta kierrosta kampiakseli pyörii 5 sekunnissa?

15. Konepajan automaattisorvilla voi sorvata 18 akselia tunnissa.

a) Kuinka monta akselia saadaan sorvattua työpäivän aikana (oletus: työaika 7,5 tuntia)?

b) Yhdestä sorvatusta akselista yritys saa voittoa 4,50 euroa. Voiton määrässä ei ole otettu huomioon sorvin koneajan hintaa. Kuinka paljon yritys saa voittoa työpäivän jälkeen, kun huomioidaan sorvin päivävuokra, jonka suuruus on 260 €/vrk.

c) Kuinka paljon voitto on, jos vuokran suuruus olisi 650 €/vrk?

16. Erään konealan yrityksen johtokunta päätti kannustaa vuotuisen bonusrahan avulla työntekijöitään savuttomuuteen. Johtokunta päätti, että savuttomille työntekijöille maksettavan bonusrahan suuruus on yhtä paljon kuin summa, jonka yritys menettää tupakoivien työntekijöiden vuoksi. Työntekijöitä tarkkailtaessa huomattiin, että 20 % työntekijöistä tupakoi. Keskimääräinen tupakoija kävi työaikana sopimuksen mukaisten taukojen ulkopuolella neljä kertaa tupakalla yhden työpäivän aikana. Tupakkatauon vuoksi tupakoija oli työpisteeltään poissa päivässä keskimäärin 5 min 20 s.

a) Laske, kuinka paljon savuton henkilö tuottaa tupakoivaan henkilöön verrattuna yritykselle vuodessa enemmän rahaa, kun jokainen tunti työpisteellä tuottaa yritykselle 70 euroa, ja kun työntekijällä on 230 työpäivää vuodessa.

b) Kuinka paljon savuton henkilö sai bonusrahaa, kun a-kohdassa laskettu rahamäärä jaettiin savuttomien työntekijöiden kesken tasan.

3

Prosentit

- Prosentin käsite
- Prosenttilaskutyypit
- Promille
- Prosenttiyksikkö

Prosentin käsite

Mopon bensiiniin sekoitetaan 2,5 % öljyä. Frisbeegolfkiekot ovat tänään 30 %:n alennuksessa. Pikavipin vuosikorko on 450 %.

Prosentin käsite tulee vastaan jokaisen arki- ja työelämässä jatkuvasti. Jos et tunne prosenttia ja sen laskemista, elämäsi hankaloituu tarpeettomasti.

Prosenttia käytetään kuvamaan asioiden suhteellista osuutta jostain kokonaisuudesta. Viereisen infotaulun voisit melkeinpä kopioida seinällesi!

Työsalin huoneentaulu

Yksi prosentti vastaa yhtä sadasosaa:

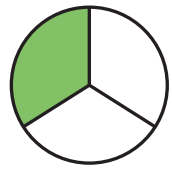
$$1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Koska prosentti on suhdeluku, sillä ei ole lainkaan yksikköä.

Jotta opit laskemaan prosenttilaskuja, sinun täytyy aluksi oppia muuttamaan prosenttiluvut desimaaliluvuiksi ja päinvastoin.

Esimerkki 1

Luku 0,333... voidaan ilmaista seuraavilla tavoilla:

desimaaliesitys	prosenttiesitys	murtolukuesitys	graafinen esitys
0,333...	33,3...%	$\frac{1}{3}$	

Kun muutetaan prosenttilukua desimaaliluvuksi, pilkku siirtyy kaksi pykälää vasemmalle (jaa sadalla).

Kun muutetaan desimaalilukua prosenttiluvuksi, pilkku siirtyy kaksi pykälää oikealle (kerro sadalla).

Tehtäviä

1. Muunna prosenttiluvut desimaaliluvuiksi.

a) 15 % _____ b) 10 % _____ c) 25 % _____

d) 66 % _____ e) 74 % _____ f) 103 % _____

g) 153 % _____ h) 200 % _____ i) 0,9 % _____

2. Muunna desimaaliluvut prosenteiksi.

a) 0,53 _____ b) 0,08 _____ c) 0,0861 _____

d) 0,366 _____ e) 0,008 _____ f) 5,6 _____

g) 0,033 _____ h) 1,30 _____ i) 100 _____

3. Muunna luvut prosenteiksi.

a) $\frac{1}{2}$ _____ b) $\frac{7}{20}$ _____ c) $2\frac{1}{10}$ _____

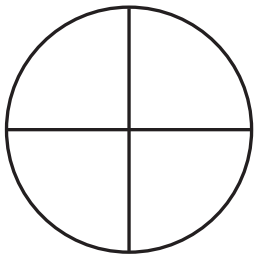
d) 0,05 _____ e) 1,04 _____ f) 0,78 _____

g) kolmekymmentäkaksi sadasosaa _____

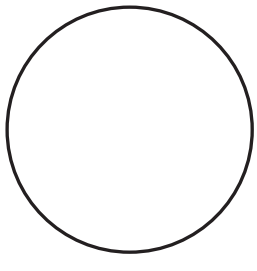
h) kolmannes (yksi kolmasosa) _____ i) yksi tuhannesosa _____

4. Väritä kuviosta kuvion päällä olevan prosenttiluvun kokoinen alue.

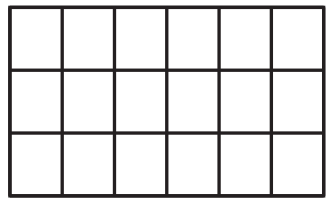
50 %



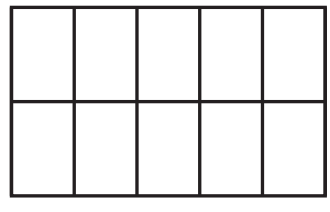
100 %



33,33... %



15 %



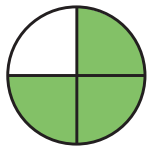
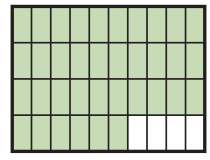
5. Muunna murtoluvut prosenteiksi.

a) $\frac{100}{150}$ = _____ b) $\frac{2}{7}$ ≈ _____

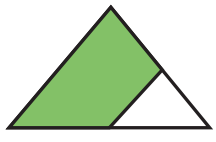
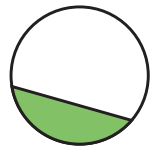
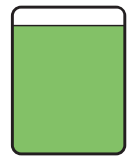
c) $\frac{2}{11}$ ≈ _____ d) $4\frac{1}{9}$ ≈ _____

Jos murtoluvun nimittäjää ei saada helposti muutetuksi sadaksi, murtoluku kannattaa muuttaa ensin desimaaliluvuksi jakamalla osoittaja nimittäjällä. **Desimaaliluku saadaan prosenttiluvuksi kertomalla se sadalla.**

6. Ilmoita murtolukuna, desimaalilukuna ja prosentteina, kuinka suuri osa kuviosta on tummennettu? Yritä käyttää mahdollisimman vähän laskinta.

	a)	b) 	c)	d)	e) 
murto-luku					
desimaali-luku					
prosentti-luku					

7. Arvioi viiden prosentin tarkkuudella, kuinka suuri osa kuviosta on väritetty.

a) 	b)	c) 	d) 

8. Kuinka paljon on yksi kymmenesosa viidestäsadasta eurosta? _____

9. Kuinka paljon on kolme kymmenesosaa kahdestasadasta eurosta? _____

10. Kuinka paljon on yksi sadasosa seitsemästäsadasta eurosta? _____

11. Kuinka paljon on kuusi sadasosaa kahdestasadasta eurosta?
(*Laske ensin yksi sadasosa ja kerro se sitten kuudella.*) _____

12. Laita alla olevien lukujen väliin jokin seuraavista merkeistä: <, > tai =

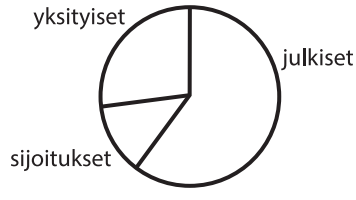
7 : 100	7 %	seitsemän sadasosaa	0,07

13. Kuinka paljon on 7 % kahdestasadasta eurosta? _____

14. Kuinka paljon on 8 % viidestäkymmenestä eurosta? _____

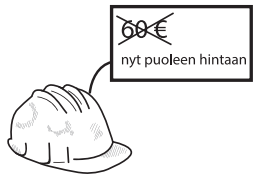
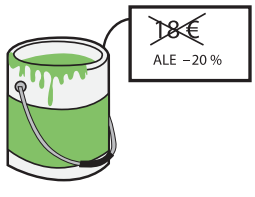
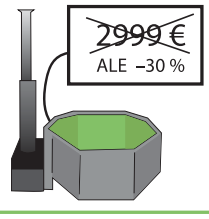
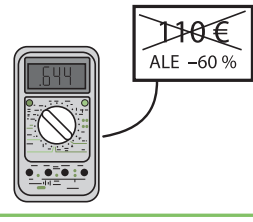
15. Kuinka paljon on 75 % kahdestasadastaviidestäkymmenestä eurosta? _____

16. Erään elektroniikka-alan yhtiön tuloista 65 % saatiin julkiselle sektorille suunnatuista tuotteista. Tuloista 28 % saatiin yksityiseltä sektorilta. Loput saatiin sijoitustoiminnasta. Kuinka monta prosenttia tuloksesta tuli sijoitustoiminnasta?



_____

17. Kuviin on merkitty tuotteen alkuperäinen hinta. Laske ilman laskinta, millä hinnalla tuote myydään alennuksen jälkeen.

			
a)	b)	c)	d)

18. Arvioi, millä välillä vastaus on seuraavissa tapauksissa. Anna kymmenen prosenttiyksikön pituinen väli.

a) Kuinka monta prosenttia 5 on 20:stä?

b) Kuinka monta prosenttia 10 on 50:stä?

c) Kuinka monta prosenttia 3 on 10:stä?

d) Kuinka monta prosenttia 9 on 40:stä?

e) Kuinka monta prosenttia 45 euroa on 200 eurosta?

f) Kuinka monta prosenttia 42 euroa on 150 eurosta?

g) Kuinka monta prosenttia 720 000 ihmistä on viidestä miljoonasta?

h) Kuinka monta prosenttia 180 euroa on 140 eurosta?

Arviointi on tärkeä taito elämässä. Arvioinnin avulla pystyt myös ehkäisemään laskuvirheitä.

Kun jaat perusarvon luvulla 10, saat 10 prosenttia. Muut tasakymmenet saat kertomalla edellistä tulosta kokonaisluvuilla.

Esimerkiksi 10 prosenttia 200 €:sta on 200 € : 10 = 20 €. Tällöin 20 % on 40 € ja 30 % = 60 €.

19. Laitteen hyötysuhde on 65 %. Laske, kuinka suuren tehon laitteesta saa, kun sen ottoteho on 6 000 wattia.

Prosenttilaskutyypit

Prosenttilaskujen laskemista pidetään yleisesti hieman hankalana. Asia helpottuu, jos ajattelee, että prosenttilaskuja on kolmea eri tyyppiä: 1. prosenttiarvon määritys, 2. prosenttiluvun määritys ja 3. perusarvon määritys. Seuraavissa luvuissa käsitellään järjestyksessä nämä kolme erilaista prosenttilaskutyyppiä.

Tyyppi 1: Prosenttiarvon määritys

Kun tiedät perusarvon ja haluat laskea siitä tietyn prosenttiosuuden, olet laskemassa prosenttiarvoa.

Lähestytään asiaa esimerkin kautta.

Esimerkki 2

Laske 24 %:n osuus 600 eurosta.

Tapa 1
Muutetaan prosentit desimaaliluvuiksi ja kerrotaan sillä perusarvo:

$0{,}24 \cdot 600\ € = 144\ €.$

Tapa 2
Jaetaan perusarvo sadalla ja selvitetään yhtä prosenttia vastaava osuus.
Tämän jälkeen kerrotaan tulos 24:llä:

$$\frac{600\ €}{100} \cdot 24 = 144\ €.$$

Huomasithan, että tämä on matemaattisesti aivan sama laskutapa kuin ensimmäinenkin!

Esimerkki 3

Sait palkkaa 2 800 euroa. Joudut maksamaan palkastasi ennakonpidätystä 21 %. Laske ennakonpidätyksen määrä.

Kyseessä on juuri samankaltainen tehtävä kuin edellisessä esimerkissä. Nyt tehtävänanto on vain verhottu käytännön elämään. Tehtävän ydin on siis ”Laske 21 %:n osuus 2 800 eurosta”. Tehdään kuten aikaisemminkin:

$0{,}21 \cdot 2\,800\ € = 588\ €.$

Ennakonpidätystä on siis maksettava 588 euroa.

Esimerkki 4

Rautakaupassa kaikki teräslevyt ovat 40 prosentin alennuksessa. Erään teräslevyn lähtöhinta on 179 euroa. Paljonko tuotteelle jää hintaa?

Tapa 1
Lasketaan ensin alennus:

0,40 · 179,00 € = 71,60 €.

Vähennetään alennus alkuperäisestä hinnasta, jolloin saadaan alennettu hinta:

179,00 € – 71,60 € = 107,40 €.

Vastaus: Teräslevy maksaa alennuksen jälkeen 107,40 euroa.

Tapa 2
Lasketaan aluksi, kuinka monta prosenttia hinnasta jää maksettavaksi alennuksen jälkeen:

100 % – 40 % = 60 %

Toisin sanoen tuotteen alkuperäisestä hinnasta on jäljellä 60 % ja loppuhinnaksi saadaan

0,60 · 179,00 € = 107,40 €.

Vastaus: Teräslevy maksaa alennuksen jälkeen 107,40 euroa.

Tehtäviä

1. Arvioi ensin, kuinka paljon on 50 % seuraavista luvuista, ja tarkista tulos sen jälkeen laskemalla. Ilmoita tulos kokonaislukuna.

Luku	Arvio	Laskun tulos
100		
50		
120		
500		
1 000		

2. Arvioi ensin, kuinka paljon on 20 % seuraavista luvuista, ja tarkista tulos sen jälkeen laskemalla. Ilmoita tulos kokonaislukuna.

Luku	Arvio	Laskun tulos
10		
20		
150		
400		

3. Arvioi ensin, kuinka paljon on 33 % seuraavista luvuista, ja tarkista tulos sen jälkeen laskemalla. Ilmoita tulos kokonaislukuna.

Luku	Arvio	Laskun tulos
100		
300		
45		
75		

4. Arvioi ensin, kuinka paljon on 75 % seuraavista luvuista, ja tarkista tulos sen jälkeen laskemalla. Ilmoita tulos kokonaislukuna.

Luku	Arvio	Laskun tulos
1 000		
400		
75		
24		
1 600		

5. Laske

a) 40 %:n osuus 300 eurosta

b) 16 %:n osuus 560 kilogrammasta

c) 6 %:n osuus 9 000:sta

d) 0,5 %:n osuus 50 eurosta

e) 160 %:n osuus 45:stä

f) 15 %:n osuus 54 000 kilometristä.

6. Laske

a) 4,52 %:n osuus 35 eurosta

b) 1,6 %:n osuus 50 grammasta

c) 0,35 %:n osuus 5 900:sta

d) 160,4 %:n osuus 150:sta.

e) 43 %:n osuus 45:stä

f) 15,65 %:n osuus 45 650 millimetristä.

7. Rautakaupan loppuunmyynnissä kaikki hinnat alenivat 30 %. Laske tuotteista saadut alennukset ja uudet hinnat.

	a) vasara, hinta 39,00 euroa	b) kulmahiomakone, hinta 499,00 euroa	c) raitisilmamaski, hinta 699,00 euroa
Alennus			
Lopullinen hinta			

8. Invertteri-hitsauskoneen paloaikasuhde 80 ampeerin virralla oli 64 prosenttia.

a) Ota selvää, mitä paloaikasuhde merkitsee tässä yhteydessä.

b) Kuinka kauan voit hitsata yhteensä 20 minuutin aikana 80 ampeerin virralla?

9. Teräksestä tehty valukappale kutistuu jäähtyessään 2 % alkuperäisestä pituudesta. Valukappaleen alkuperäinen pituus on 400 mm. Kuinka pitkä se on jäähdytyksen jälkeen?

10. Ajoneuvon omamassalla tarkoitetaan sen massaa täydessä ajokunnossa. Tällöin polttoainesäiliön pitäisi olla täytettynä 90 %:iin tilavuudestaan. Kuorma-auton polttoainesäiliön koko on 700 litraa. Kuinka monta litraa säiliössä pitää olla polttoainetta, kun omamassaa mitataan?

11. Korota seuraavia hintoja 15 %. *Tee tehtävä ilman laskinta.*

a) 100 euroa _____ b) 200 euroa _____ c) 60 euroa _____

d) 1 000 euroa _____ e) 500 euroa _____ f) 150 euroa _____

12. Vähennä seuraavista massoista 40 %. *Tee tehtävä ilman laskinta.*

a) 10 tonnia _____ b) 15 tonnia _____ c) 60 kg _____

d) 90 g _____ e) 1 000 000 kg _____ f) 800 kg _____

13. Aggregaattiin (kaksitahtinen) tarvittiin 5 litraa polttoainetta. Kuinka paljon bensiinin sekaan pitää laittaa öljyä, jotta saadaan 2-prosenttinen seos?

Tyyppi 2: Prosenttiluvun määritys

Kun haluat laskea jonkin määrän prosenttiosuuden perusarvosta, olet laskemassa prosenttilukua. Tässä tyypissä laskun vastaus on siis aina prosentteja. Prosenttiluku saadaan selville jakolaskun avulla. Muista sijoittaa aina perusarvo jakoviivan alapuolelle.

Esimerkki 5

Kuinka monta prosenttia luku 35 on luvusta 400?

Jaetaan luvut keskenään:

$$\frac{35}{400} = 0{,}0875 = 8{,}75\ \% \approx 8{,}8\ \%.$$

Laskin antaa vastauksen paljaana desimaalilukuna (tässä esimerkissä 0,0875), mutta voit helposti muuttaa vastauksen prosenteiksi kertomalla vastauksen sadalla päässäsi.

Vastaus: 8,8 %

Esimerkki 6

Työpaikalla on yhteensä 80 työntekijää. Heistä 52 on naisia. Kuinka monta prosenttia työpaikan työntekijöistä on naisia?

Tehtävä on samanlainen kuin ensimmäinenkin. Tehtävän ydinkysymys on ”Kuinka monta prosenttia luku 52 on luvusta 80?” Ratkaistaan tehtävä kuten aikaisemminkin:

$$\frac{52}{80} = 0{,}65 = 65\ \%$$

Vastaus: Naisia on 65 %.

Muutosprosentit ovat myös tyyppiä 2. Periaate on sama kuin kahdessa aikaisemmassa esimerkissä. Jakoviivan päälle tulee muutoksen määrä. Vastaavasti jakoviivan alle jakajaksi tulee aina perusarvo eli arvo, johon muutosta vertaat. Katso mallia seuraavista esimerkeistä.

Esimerkki 7

Sorvaaja päätti laihduttaa. Hän painoi aluksi 90 kg, ja onnistuneen laihdutuksen jälkeen enää 70 kg. Montako prosenttia asentaja pudotti painoansa?

Kuten mainittua, jaetaan painon muutos alkuperäisellä painolla:

$$\frac{\text{Painon muutos}}{\text{Alkuperäinen paino}} = \frac{90\ \text{kg} - 70\ \text{kg}}{90\ \text{kg}} = \frac{20\ \text{kg}}{90\ \text{kg}} = 0{,}222\ldots \approx 22\ \%.$$

Vastaus: Sorvaaja pudotti painoaan noin 22 prosenttia.

Esimerkki 8

Sorvaaja painoi aluksi 70 kg ja lihoi hiljalleen siten, että hänen elopainonsa oli lopulta 90 kg. Kuinka monta prosenttia asentaja lihoi?

Jaetaan jälleen painon muutos alkuperäisellä painolla:

$$\frac{\text{Painon muutos}}{\text{Alkuperäinen paino}} = \frac{90\ \text{kg} - 70\ \text{kg}}{70\ \text{kg}} = \frac{20\ \text{kg}}{70\ \text{kg}} = 0{,}2857\ldots \approx 29\ \%.$$

Vastaus: Sorvaaja lihoi noin 29 %.

Huomaa, että esimerkeissä 3 ja 4 painot ovat samat (70 kg ja 90 kg), mutta vastaukset ovat erilaisia. Laskijan täytyy pitää aina mielessä, mihin arvoon muutosta ollaan kulloinkin vertaamassa

Muutosprosentti on mahdollista ratkaista myös seuraavalla tavalla.

Esimerkki 9

Sorvaajan paino oli tammikuun alussa 75 kg ja tammikuun lopussa 73 kg. Kuinka suuri painon muutos oli prosentteina?

Verrataan kuukauden lopussa ollutta painoa alkukuun painoon eli

$$\frac{73\ \text{kg}}{75\ \text{kg}} = 0{,}9733\ldots \approx 97{,}3\ \%.$$

Loppukuun paino oli siis 97,3 % alkukuun painosta, joten muutos oli 100 % – 97,3 % = 2,7 %.

Tehtäviä

1. Arvioi, kuinka monta prosenttia annettu luku on luvusta 1 000. Tarkista tulos sen jälkeen laskemalla. Ilmoita tulos kokonaislukuna.

Luku	Arvio	Laskun tulos
100		
880		
370		
20		

2. Arvioi, kuinka monta prosenttia annettu luku on luvusta 2 400. Tarkista tulos sen jälkeen laskemalla.

Luku	Arvio	Laskun tulos
240		
720		
500		
600		

3. Kuinka monta prosenttia on

a) 50 euroa 300 eurosta _____

b) 16 kg 560 kg:sta _____

c) 65 naulaa 160 naulasta _____

d) 4,5 cm 50 cm:stä _____

e) 80 mm 45 cm:stä _____

f) 16 euroa 5 400 eurosta? _____

4. Automaatiolinjastolla on konesilmä, joka arvioi automaattisesti tuotteen laatua. Kone on hylännyt 18 tuotetta 1 230 tuotteesta. Mikä on tuotteiden hylkäysprosentti?

_____

5. Laske seuraava tehtävä ilman laskinta. Kuinka monta prosenttia on

a) 50 euroa 150 eurosta _____ b) 5 kg 50 kg:sta _____

c) 1,40 euroa 1 400 eurosta _____ d) 1,5 cm 6 cm:stä _____

e) 12,5 mm 10 cm:stä _____ f) 40 euroa 200 eurosta? _____

6. Läpijäähdytetyllä kovametalliporalla onnistuttiin pudottamaan erään kappaleen työstöaikaa 43,5 prosenttia. Kuinka kauan kappaleen työstäminen kesti nyt, kun siihen aiemmin meni 1,45 minuuttia?

_____

7. Kun valukappale jäähtyi, se kutistui alkuperäisestä pituudesta 3 mm. Kappaleen alkuperäinen pituus oli 200 mm. Kuinka monta prosenttia kutistuma oli?

_____

8. Normaalia rakenneterästä jyrsittäessä leikkuunopeus HSS:lla on 30 m/min, kun taas kovapalaterällä leikkuunopeutta voidaan nostaa arvoon 110 m/min. Kuinka monta prosenttia suurempi leikkuunopeus kovapalaterällä on pikateräkseen verrattuna?

_____

9. Laske, kuinka monta prosenttia

a) isompi 100 euroa on kuin 50 euroa _____

b) pienempi 50 euroa on kuin 100 euroa. _____

$$\text{muutosprosentti} = \frac{\text{muutos}}{\text{arvo, johon vertaat}} \cdot 100\ \%$$

10. Palkkasi nousi 1 500 eurosta 2 000 euroon. Kuinka suuri palkankorotuksesi oli prosentteina?

11. Yrittäjä osti materiaalia toimittajaltaan tukkuhintaan ja maksoi siitä 14,28 €. Materiaalin hinta henkilöasiakkaalle olisi ollut 23,04 €. Kuinka paljon hän sai tukkualennusta prosentteina?

12. Erästä pesuainetta voidaan käyttää joko peruspuhdistukseen tai tehopuhdistukseen, jolloin pinta on valmis käsiteltäväksi muulla aineella. Kun ainetta käytetään peruspuhdistukseen, siitä tehdään sekoitussuhde, jossa on 30 ml ainetta ja 1 l vettä. Jos sitä käytetään tehopuhdistukseen, sekoitussuhde on 50 ml ainetta ja 1 l vettä. Mikä on valmiin seoksen sekoitussuhde prosentin kymmenyksen tarkkuudella?

a) peruspuhdistuksessa

b) tehopuhdistuksessa?

Tyyppi 3: Perusarvon määritys

Toisinaan tulee eteen tilanne, jossa tiedetään tietyn määrän osuus prosentteina jostain perusarvosta. Perusarvon määritykseen on käytännössä kaksi tapaa.

Esimerkki 10

Mistä rahasummasta 15 euroa on 6 %?

Tapa 1

Muutetaan prosentti desimaaliluvuksi ja jaetaan sillä tehtävässä annettu rahamäärä.

$$\frac{15\ €}{0{,}06} = 250\ €$$

Tapa 2

Jaetaan tehtävässä annettu rahamäärä kuudella, jolloin saadaan yhtä prosenttia vastaava rahamäärä. Kerrotaan tulos lopuksi sadalla, jolloin saadaan perusarvo:

$$\frac{15\ €}{6\ \%} \cdot 100\ \% = 250\ €.$$

Matemaattisesti ajatellen kumpikin tapa on kuitenkin lopputuloksen kannalta täsmälleen sama.

Tehtäviä

1. Päättele ilman laskinta, mistä määrästä

a) 2 € on 50 % _____ b) 16 € on 10 % _____ c) 4 cm on 200 % _____

d) 65 kg on 65 % _____ e) 2 snt on 1 % _____ f) 15 kg on 20 %. _____

2. Mistä määrästä

a) 14 kg on 30 % _____ b) 16 kg on 12 % _____ c) 4 kg on 2,5 % _____

d) 0,65 kg on 65 % _____ e) 8 kg on 1,2 % _____ f) 64 kg on 18 %? _____

3. Manuaalisorvaaja oli maksanut palkastaan veroja 430 euroa, joka oli 27 % koko palkasta. Mikä oli sorvaajan bruttopalkka?

_____

4. Vaihtolavaa oli tehty jo 5 päivää. Työnjohtaja sanoi, että luultavasti työstä on tehty jo 25 %. Kuinka montaa päivää vaihtolavan teko kestäisi yhteensä?

_____

5. Automaattisen pistepuikon hintaa oli laskettu 4 euroa, joka vastasi 15 prosenttia kokonaishinnasta. Mikä oli tuotteen alkuperäinen hinta?

_____

_____

6. Valukappale kutistuu jäähtyessään, ja messingillä kutistuman suuruus on 1,6 %. Kuinka leveä muotin pitää olla, kun halutaan, että messinkinen kappale on jäähdyttyään 300 mm leveä? Anna vastaus millimetrin tarkkuudella.

_____

_____

_____

7. Arvonlisäverokannat vaihtelevat eri hyödykeryhmittäin.

yleinen verokanta: useimmat tavarat ja palvelut	**24 %**
alennettu verokanta: elintarvikkeet, rehu, ravintola- ja ateriapalvelut	**14 %**
alennettu verokanta: kirjat, lääkkeet, liikuntapalvelut, elokuvanäytökset, kulttuuri- ja viihdetilaisuuksien sisäänpääsy, henkilökuljetus, majoituspalvelut ja televisio- ja yleisradiotoiminnasta saadut korvaukset	**10 %**

a) Kuinka paljon seuraavat summat sisältävät arvonlisäveroa kun ostokset sisältävät työkaluja? *Vinkki: Arvonlisävero lasketaan aina verottomasta hinnasta.*

Ostosten verollinen loppusumma	Arvio	Laskun tulos
389,00 €		
550,00 €		
25,00 €		
1 058,25 €		

b) Kuinka paljon seuraavat ruokaostokset sisältävät arvonlisäveroa?

Ostosten verollinen loppusumma	Arvio	Arvonlisäveroa
48,00 €		
50,00 €		
50,00 €		

c) Kuinka paljon seuraavat ostokset sisältävät arvonlisäveroa?

Ostos	Arvio	Arvonlisäveroa
Matkalippu 89,00 €		
Oppikirjoja 150,00 €		
Karkkiostokset 25,00 €		
MMJ 812,25 €		
Vaatteita 124,00 €		

Promille

Yksi promille tarkoittaa yhtä tuhannesosaa, eli

$$1\text{ ‰} = 0{,}001$$

Huomaa, että jokainen prosenttilaskentaan kuuluva sääntö pätee myös promilleja laskettaessa.

Esimerkki 11

Hopealautasen massa oli 280,0 g. Kemiallisessa määrityksessä todettiin, että lautasen massasta oli puhdasta hopeaa 232,4 grammaa. Mikä oli lautasen hopeapitoisuus promilleina?

Tehtävässä kysytään promillelukua, eli sovelletaan prosenttilaskutyyppiä 2:

$$\frac{232{,}4\text{ g}}{280\text{ g}} = 0{,}83 = 830\text{ ‰}$$

Nyt laskimen antama desimaaliluku muutetaan promilleiksi kertomalla se tuhannella.

Vastaus: Lautasen hopeapitoisuus oli 830 promillea.

Lisätietoa: Kultaisissa ja hopeisissa arvoesineissä arvometallin pitoisuus promilleina on stanssattu esineeseen. Löydätkö koruistasi leiman? Jos et, omistat todennäköisesti rihkamaa.

Tehtäviä

1. Laske ilman laskinta, kuinka paljon on 1 promille

a) 3 000 kg:sta _____ b) 20 mg:sta _____

c) 12 €:sta _____ d) 800 litrasta. _____

2. Laske ilman laskinta, kuinka paljon on

a) 300 promillea 2 000:sta _____ b) 10 ‰ 40:stä _____

c) 15 ‰ 490:stä _____ d) 6 ‰ 300:sta. _____

Prosenttiyksikkö

Prosenttiyksikköä käytetään vertailtaessa eri prosenttiosuuksia. Prosenttiyksikkö saadaan prosenttilukujen erotuksena.

Esimerkki 12

Puolueen kannatus oli edellisessä vaaleissa 14 %. Uusissa vaaleissa kannatus oli kasvanut 25 %:iin.

a) Kuinka monta prosenttiyksikköä kannatus kasvoi?

Kannatuksen kasvu prosenttiyksikköinä saadaan prosenttien erotuksesta:

$25\ \% - 14\ \% = 11\ \%$.

Vastaus: Kannatus kasvoi 11 prosenttiyksikköä.

b) Kuinka monta prosenttia kannatus kasvoi?

Kysymys on muutosprosentista: $\dfrac{\text{Kannatuksen muutos}}{\text{Alkuperäinen kannatus}} = \dfrac{25\ \% - 14\ \%}{14\ \%} =$

$$\frac{11\ \%}{14\ \%} = 0{,}7857\ldots \approx 79\ \%$$

Vastaus: Kannatus kasvoi noin 79 prosenttia.

Tehtäviä

1. Täydennä taulukko päättelemällä, ilman laskinta.

	1 %	10 %	20 %	25 %	50 %
200 €:sta					
50 €:sta					
3 000 €:sta					
4 €:sta					
15 €:sta					

2. Kuinka monta prosenttiyksikköä on muutos

a) 15 %:sta 30 %:iin _____ b) 50 %:sta 70 %:iin? _____

3. Kultaesineestä on kultaa 690 promillea. Paljonko sitä on, jos kultaesineen massa on 400 grammaa?

_____

4. Vanhaan moottorikelkkaan suositellaan laittamaan bensiiniseosta, jossa on 3 % öljyä. Kuinka paljon 27 litran tankkiin laitetaan öljyä, jos tankki tankataan täyteen?

_____

5. Metalliliiton jäsenmaksu on 1,75 % bruttopalkasta. Kuinka paljon Eikka maksaa kuukauden palkasta jäsenmaksua, kun hänen bruttopalkkansa on 2 890 €?

_____

6. Ahjohitsauksessa (eli pajahitsauksessa) metallikappaleiden hitsauslämpötila on 50–90 % kappaleiden sulamislämpötilasta. Millä välillä lämpötilan täytyy olla, kun rauta-kappaletta ahjohitsataan? Raudan sulamislämpötila on 1 538 °C.

_____

7. Alla on taulukoitu erään pienhitsaustuotteen kustannukset. Laske osuudet prosentteina tyhjään sarakkeeseen. Anna vastaukset yhden desimaalin tarkkuudella.

Kohde	Kustannukset (€)	Osuus (%)
Työ	28,00	
Materiaalit	4,80	
Suojakaasu	1,40	
Koneen käyttökustannukset	1,55	
Energia	0,68	

8. Mikon palkka nousi ensin 3 % ja puolen vuoden jälkeen vielä 2 %. Tanelin palkkaa korotettiin kerralla 5 %. Kumman palkka oli korotuksien jälkeen suurempi? Molempien kuukausipalkka ennen korotusta oli 1 800 €.

9. Paloaikasuhdetta käytetään hitsaustalouden määrittämisessä. Se on kaariajan (tai paloajan) suhde kokonaistyöaikaan prosentteina. Eräässä MAG-umpilankahitsauksessa kaariaika oli 2 min ja muu työaika oli 4,5 min. Mikä oli paloaikasuhde prosentteina?

10. Auton omistajalla on 35 %:n bonus vakuutusyhtiössä. Hän saa vakuutuksesta 35 %:n alennuksen. Bonus huomioon otettuna vakuutuksen hinta on 678 € vuodessa. Mikä olisi vakuutusmaksu ilman bonusta?

11. Kun maa-ainesta siirretään kasasta kuljetusauton lavalle, sen tilavuus kasvaa, kun maa-aineksen väliin pääsee ilmaa. Hiekkakasan tilavuus ennen lastausta oli 300 m^3 ja lastauksen jälkeen mitattu tilavuus oli 390 m^3. Kuinka monta prosenttia hiekkakasan tilavuus kasvoi?

12. Erään kunnan työttömyys oli heinäkuussa 14 % ja syyskuussa 1,2 prosenttiyksikköä pienempi. Kunnan väkiluku oli heinäkuussa 12 435 ja syyskuussa 12 387.

a) MIkä oli kunnan työttömyysprosentti syyskuussa?

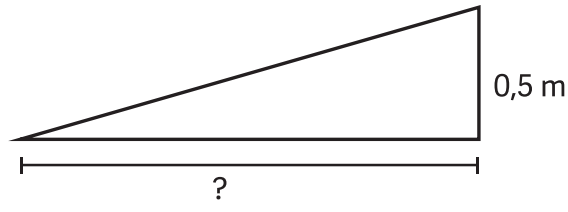
b) Kuinka paljon kunnassa oli työttömiä syyskuussa?

13. Netan kuukausipalkka on 1 890 €. Palkasta menee veroihin 20 %, TyEl-maksuun 6,15 % ja työttömyysvakuutusmaksuun 1,60 %. Kuinka monta euroa Netalle jää palkasta maksujen jälkeen käteen?

14. Hitsauspuikkopaketin verollinen hinta on 49 €. Laske veroton hinta. Arvonlisävero on 24 %.

15. Mauri tarvitsee tiiliseinän puhdistamiseen laastista 5-prosenttista suolahappoliuosta. Hänellä on 0,5 litraa suolahappoliuosta, jonka pitoisuus on 25 %. Kuinka paljon siihen on lisättävä vettä, jotta pitoisuus on sopiva?

16. Luiskan kaltevuus saa olla enintään 8 % (eli korkeus saa olla korkeintaan 8 % leveydestä). Laske, kuinka kauaksi korokkeesta luiskan pään on vähintään tultava, kun luiskan on yllettävä 0,5 metrin korkeuteen.



17. Dieselmoottorin hyötysuhde on 40 % ja bensiinimoottorin 25 %. Kuinka monta prosenttia parempi dieselmoottorin hyötysuhde on bensiinimoottoriin verrattuna?

18. Sähköyhtiö laski sähkön hintaa 15 %. Tämä lisäsi sähkön myyntiä 16,5 %. Kasvoiko sähköyhtiön voitto?

19. Kaasupullossa olevan kaasun tilavuus (litroina) saadaan laskettua kaavalla

V = astian tilavuus (l) · paine (bar) · 10.

Täyden kaasupullon (15 litraa) paine oli 200 bar. Viikon käytön jälkeen kaasupullon paine oli 140 bar. Kuinka monta prosenttia kaasupullon kaasusta on käytetty?

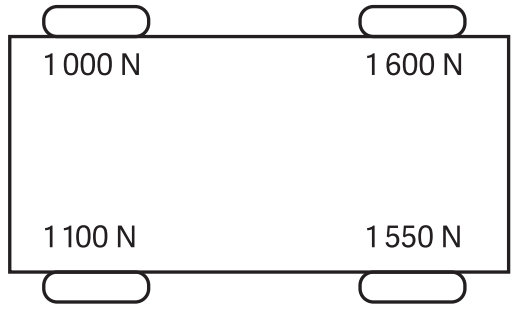
20. Metallivalu kutistuu 1,5 % jähmettyessään sulasta kiinteäksi. Kiinteänä valurautakappaleen tulisi olla pituudeltaan 250 mm. Kuinka pitkä täytyy valumuotin olla?

21. Kupari-nikkeliseoksessa on 65 % kuparia ja 35 % nikkeliä. Tätä seosta on 125 g, ja se sekoitetaan toisen kupari-nikkeliseoksen kanssa. Siinä kuparia on 85 % ja nikkeliä 15 %. Toinen seos painaa 235 g. Mikä on lopullisen seoksen

a) kuparipitoisuus prosentteina

b) nikkelipitoisuus prosentteina?

22. Henkilöauton jarruvoimien summan (kaikkien neljän pyörän) pitäisi olla vähintään 58 % auton painovoimasta. Erään auton pyöräkohtaiset jarruvoimat ovat seuraavat: 1 000 N, 1 600 N, 1 100 N ja 1 550 N. Auton painovoima on 9 250 N. Ovatko auton jarruvoimat riittävät?



23. Kuinka monta prosenttia (ja mihin suuntaan) CNC-jyrsimen hinta muuttui, kun se nousi ensin 5 % ja laski sitten 6 %?

4

Geometria ja mittakaava

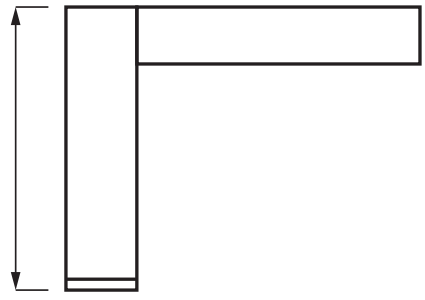
- Mittakaava
- Pinta-alat
- Kolmio
- Pythagoraan lause
- Ympyrä
- Avaruusgeometria
- Lieriön tilavuus ja pinta-ala
- Kartion tilavuus ja pinta-ala
- Pallon tilavuus ja pinta-ala
- Kulmien suuruudet
- Trigonometria
- Kosini ja sini

Mittakaava

Mittakaavaa käytetään, kun halutaan kuvata sellaista kohdetta, joka on liian suuri tai pieni todellisessa koossa piirrettäväksi. Mittakaava on piirustuksessa olevan mitan ja todellisen mitan välinen suhde. Mittakaavaa käytetään muun muassa kartoissa ja rakennuspiirustuksissa. Esimerkiksi mittakaava 1:100 tarkoittaa, että 1 cm piirustuksessa vastaa 100 cm:ä luonnossa eli luonnollinen koko on 100 kertaa suurempi.

Esimerkki 1

Kuvassa oleva metallijalka on piirretty mittakaavassa 1:4. Kuinka pitkä metallijalka on todellisuudessa?



Ratkaisu:

Kuvassa metallijalan korkeus on 30 mm.

Todellisuudessa korkeus on nelinkertainen, eli

$30\ \text{mm} \cdot 4 = 120\ \text{mm} = 12\ \text{cm}$.

Vastaus: Metallijalka on todellisuudessa 12 cm korkea.

Esimerkki 2

Mikä on piirustuksen mittakaava, kun talon harjan korkeus on todellisuudessa 2 metriä ja piirustuksessa se on 5 cm?

Ratkaisu:

Kun lasketaan todellisen ja piirustuksessa olevan mitan välistä suhdetta, yksiköiden on oltava samat!

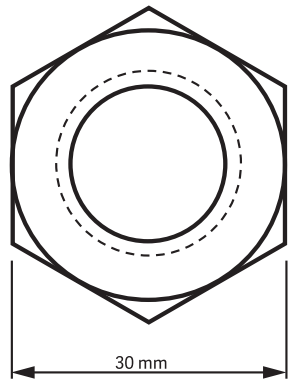
Todellisen mitan ja piirustuksessa olevan mitan suhde on tässä tapauksessa

$$\frac{2\ 000\ \text{mm}}{50\ \text{mm}} = 40.$$

Vastaus: Mittakaava on siis 1:40.

Esimerkki 3

Kuvassa on suurennos mutterista, joka on piirretty mittakaavassa 3:1. Kuinka leveä mutteri on todellisuudessa?



Ratkaisu:

Kuvassa mutterin leveys on 30 mm.

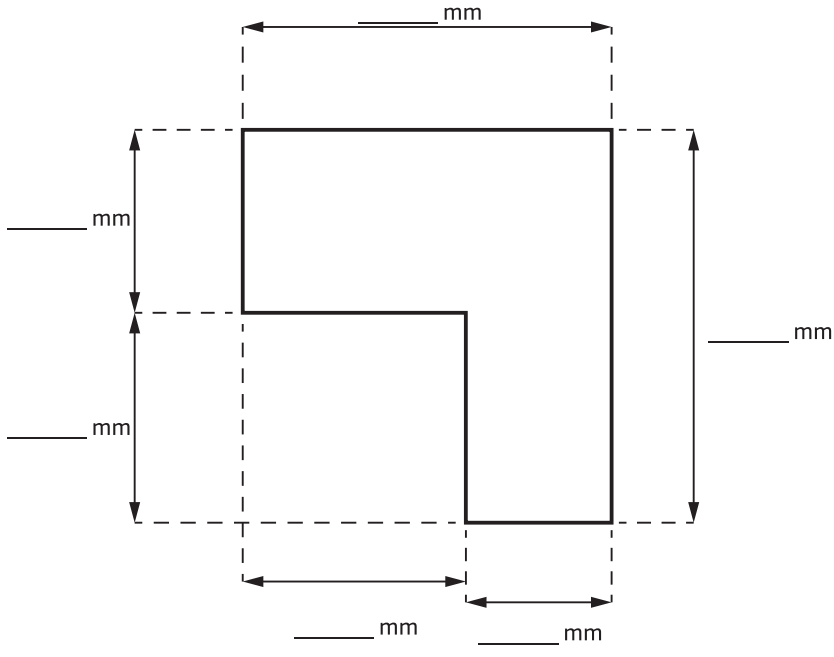
Todellisuudessa mutterin leveys on kolmasosa piirustuksen mitasta eli

30 mm : 3 = 10 mm.

Vastaus: Todellisuudessa mutteri on 10 mm leveä.

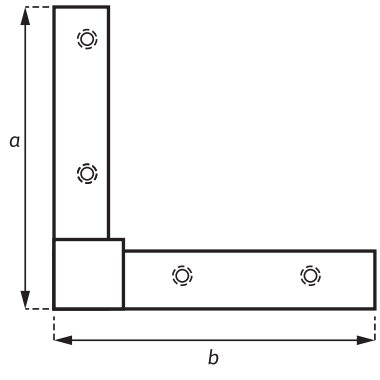
Tehtäviä

1. Vieressä oleva kuva on piirretty mittakaavassa 1:5. Mittaa ja laske todelliset mitat ja merkitse ne kuvaan.



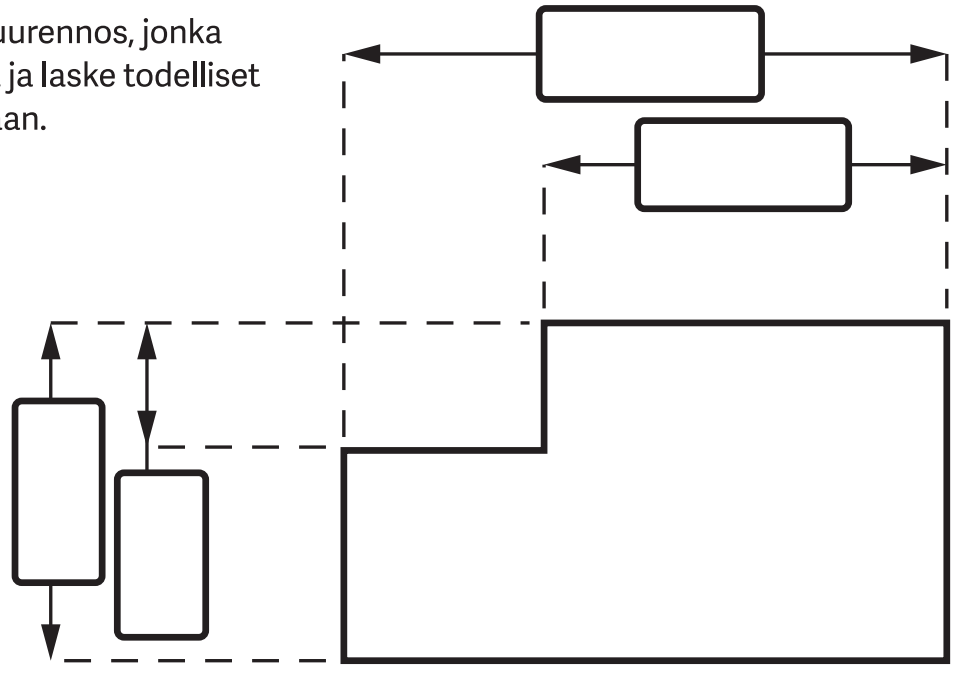
2. Vieressä oleva kuva on piirretty mittakaavassa 1:4. Mittaa ja laske

a) todelliset mitat *a* ja *b*

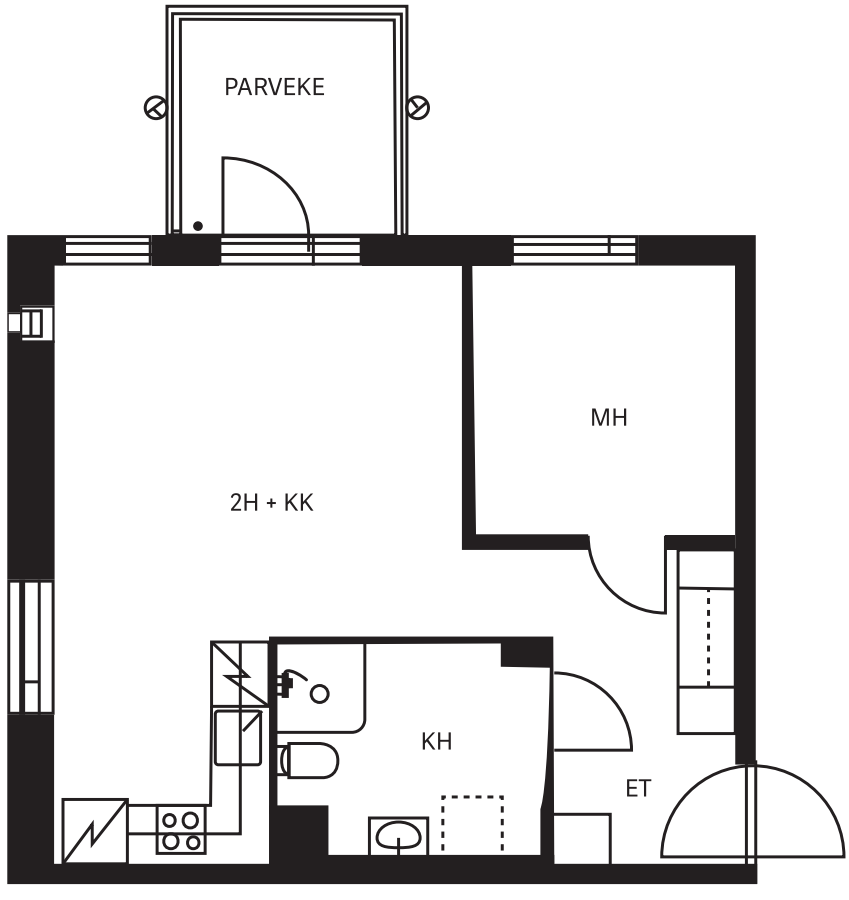


b) reikien halkaisijoiden todelliset pituudet.

3. Alla oleva kuva on suurennos, jonka mittakaava on 3:1. Mittaa ja laske todelliset mitat ja merkitse ne kuvaan.



4. Mitkä ovat makuuhuoneen todelliset mitat, kun pohjapiirustuksen mittakaava on 1:200?



5. Mikä on piirustuksen mittakaava, kun todellinen mitta

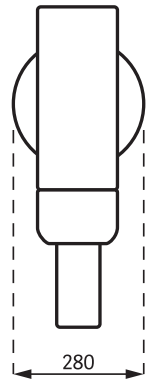
a) 500 mm on piirustuksessa 100 mm

b) 20 mm on piirustuksessa 100 mm?

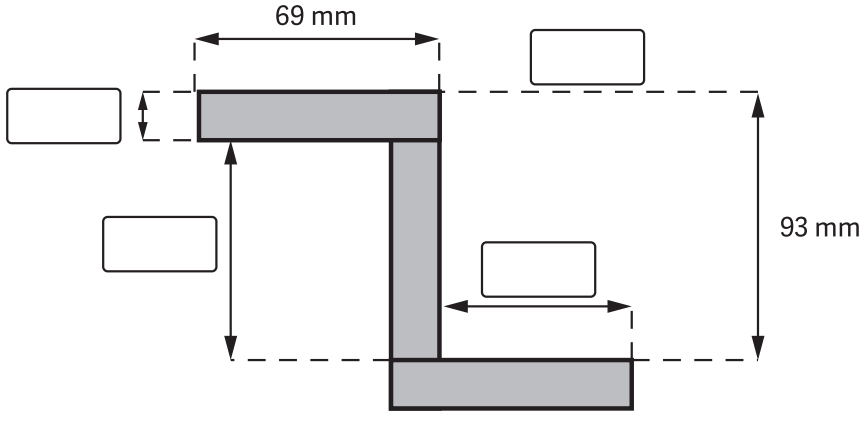
6. Kartalla kahden pisteen etäisyys on 8 cm. Mikä se on todellisuudessa, kun kartan mittakaava on 1:20 000? Anna vastaus kilometreinä.

7. Mikä on mittakaava, kun kartan 5 cm:n matka on todellisuudessa 500 m?

8. Mikä on piirustuksen mittakaava, kun kuvaan on merkitty esineen todellinen halkaisija millimetreinä?



9. Kuvassa olevat mitat ovat todellisia mittoja.



a) Mikä on piirustuksen mittakaava?

b) Ratkaise puuttuvien mittojen pituudet ja kirjoita ne kuvaan. Anna vastaus millimetreinä.

Pinta-alat

Pinta-ala on suure, jolla tarkoitetaan jonkin kaksiulotteisen kuvion tai alueen koon mittaa. Pinta-ala ilmaistaan yleisimmin seuraavien yksikköjen avulla: neliömetri (m^2), neliösenttimetri (cm^2), neliökilometri (km^2) tai vaikkapa hehtaari (ha) ja aari (a).

Pinta-alaa merkitään käytetystä yksiköstä riippumatta isolla a:lla (*A*).

Piirillä tarkoitetaan jonkin mitatun alan sivujen yhteenlaskettua pituutta.

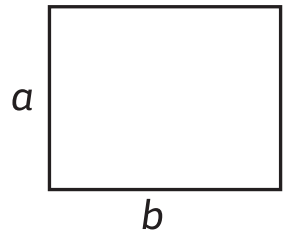
Neliö ja suorakulmio

Tyypillisimpiä pinnan muotoja rakennusalalla ovat neliöt ja suorakulmiot eli suorakaiteet. Niiden pinta-alat lasketaan seuraavasti:

– Mitataan alueen pituus ja leveys.
– Kerrotaan pituus ja leveys keskenään.

Huomaa, että neliö on myös suorakulmio.

$$A = a \cdot b$$



Esimerkki 4

Laske neliön pinta-ala, kun sivujen pituus on 2,5 m.

$2{,}5\ \text{m} \cdot 2{,}5\ \text{m} = 6{,}25\ \text{m}^2$

Esimerkki 5

Laske suorakulmion pinta-ala, kun sivujen pituudet ovat 1,5 m ja 3 m.

$1{,}5\ \text{m} \cdot 3\ \text{m} = 4{,}5\ \text{m}^2$

Esimerkki 6

Mikä on neliön piiri, kun sivun pituus on 2 m?

Lasketaan sivujen pituudet yhteen: 2 m + 2 m + 2 m + 2 m = 8 m.

Esimerkki 7

Laske neliön sivun pituus, kun neliön ala on 16 m^2.

Ratkaisu:

Koska neliön sivut ovat yhtä pitkiä, saadaan pinta-alalle yhtälö merkitsemällä sivun pituutta x:llä:

$x \cdot x = 16\ m^2$

$x^2 = 16\ m^2$, josta

$\sqrt{16\ m^2} = 4\ m$

Tehtäviä

1. Laske seuraavien alueiden pinta-alat:

a) neliö, jonka sivun pituus on 1,3 m

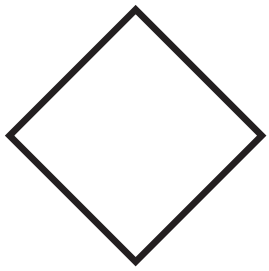
b) suorakulmio, jonka toinen sivu on pituudeltaan 1,3 m ja toinen 2,5 m.

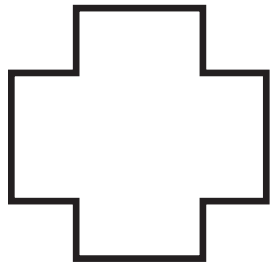
2. Metallilevyn sivujen pituudet mitattiin ja tulokseksi saatiin 1 m, 1 m, 2 m ja 2 m. Mikä on levyn pinta-ala, kun levy on suorakulmion muotoinen?

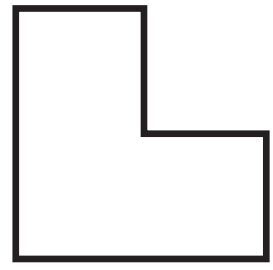
3. Metallilevystä leikataan palanen, jonka pituus on 100 mm ja korkeus 300 mm. Mikä on leikatun palan pinta-ala?

4. Metallisen ritilän standardikoko on 6 100 mm x 1 000 mm. Mikä on ritilän pinta-ala neliömetreinä?

5. Mittaa ja laske seuraavien kuvioiden pinta-alat ja piirit:







Vinkki: Jos laskettava kuvio ei ole muodoltaan nelikulmio tai kolmio, voit jakaa sen osiin, jotka ovat nelikulmioita tai kolmioita.

a) b) c)

6. Leivinuunin eduspellin täytyy olla pituudeltaan 1 100 mm ja leveydeltään 550 mm. Kuinka monta neliötä on työhön varatun pellin pinta-ala, kun valmiin eduspellin toinen pidempi sivu taitetaan 15 mm uunia vasten?

7. Seinä maalataan. Seinän koko on 6,50 m x 2,90 m, ja maalia on nyt hankittu 23,5 m^2:n alalle. Riittääkö maali?

8. Neliön pinta-ala on 81 cm^2. Laske

a) sivun pituus b) piiri.

9. Mitä tapahtuu suorakulmion pinta-alalle, jos sivun pituudet

a) kaksinkertaistuvat

b) kolminkertaistuvat?

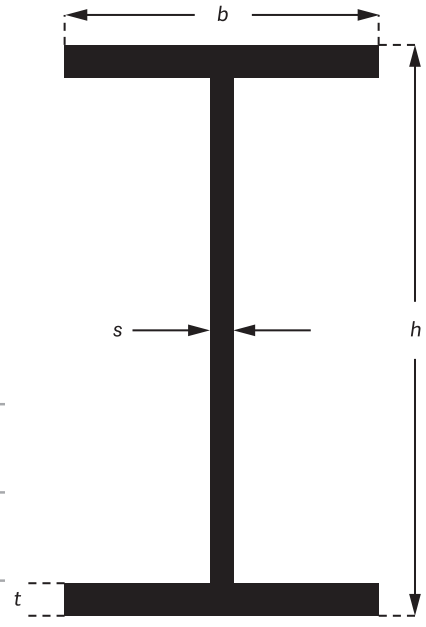
10. Työpöydän kansi maalataan molemmilta puolilta. Pöydän koko on 1,50 m x 1,90 m. Maalia riittää 3,5 m^2:n alalle. Riittääkö maali?

11. I-profiilisen teräspalkin poikkileikkaus on kuvan muotoinen. Annetut mitat ovat seuraavat:

h = 100 mm s = 4,1 mm

b = 55 mm t = 5,7 mm.

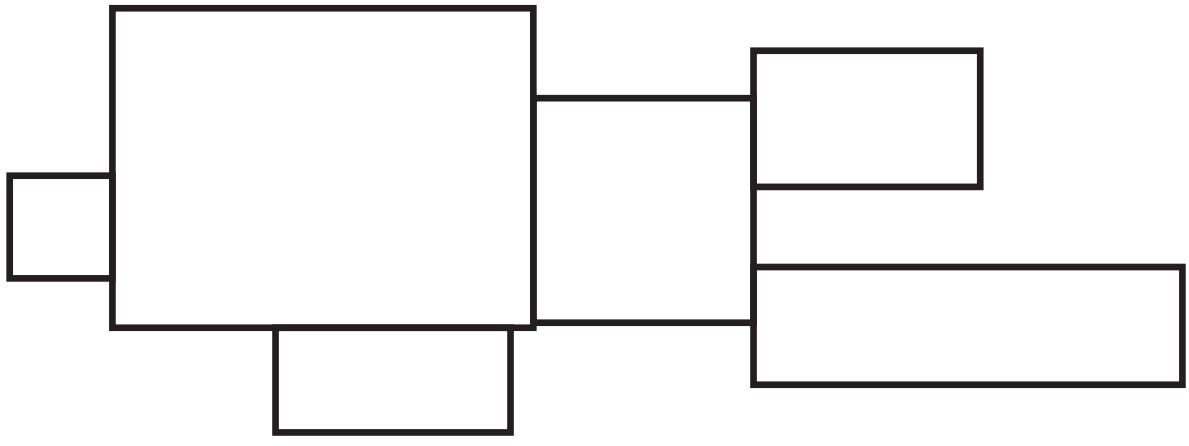
Mikä on I-palkin poikkileikkauksen pinta-ala?



12. Koiran tarha on neliön muotoinen, ja se kattaa 200 m^2:n alan.

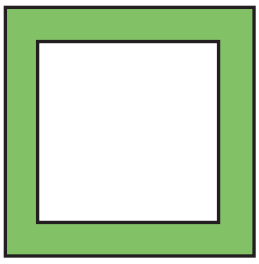
Kuinka pitkä on sivun pituus?

13. Mittaa ja laske kuvion pinta-ala:

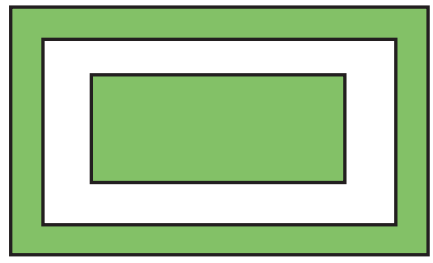


14. Mittaa ja laske seuraavien kuvioiden värillisten osien pinta-alat:

a)



b)



c)

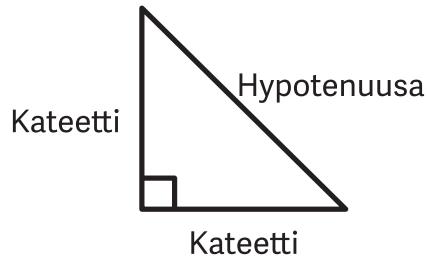
15. Metallilevyn pituus on 2 500 mm ja leveys 1 250 mm. Levystä pitäisi valmistaa neljän kiukaan kuoret. Riittääkö levy, kun yhden kiukaan kuoren korkeus on 400 mm, leveys 420 mm ja syvyys 250 mm?

16. Lattialautoja on paketissa 5 kpl. Lautojen pituus on 2,3 m ja hyötyleveys on 13,2 cm. Kuinka monta täyttä pakettia tarvitaan, jotta saadaan tehtyä lattia huoneeseen, jonka seinien pituudet ovat 5,3 m ja 6,2 m?

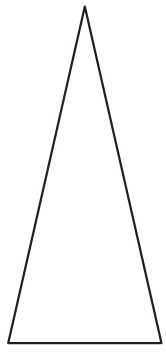
Kolmio

Metallialalla käsitellään monenlaisia kolmioita. Erilaisten kolmioiden tunnistaminen ja nimeäminen kuuluu alan perustaitoihin.

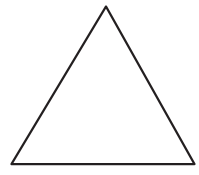
Suorakulmaisessa kolmiossa yksi kulmista on 90°. Kulma merkitään kuvan mukaisesti. Lisäksi sen sivuilla on omat nimityksensä:
– **Kateetteja** ovat suoran kulman molemmin puolin lähtevät sivut.
– **Hypotenuusa** on kolmion pisin sivu, joka yhdistää kateetit muodostaen kolmion.



Tasakylkisessä kolmiossa kyljet ovat samanmittaiset.



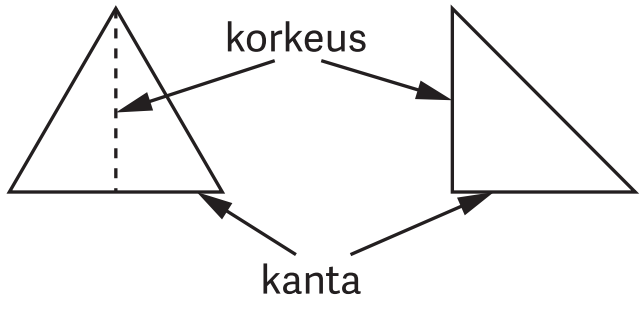
Tasasivuisessa kolmiossa kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.



Kaikkien kolmioiden pinta-ala lasketaan seuraavalla tavalla:

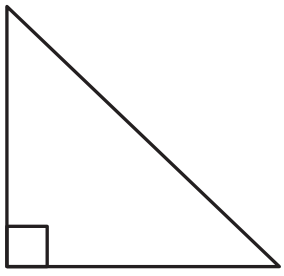
– Mitataan kolmion korkeus (h) ja kannan leveys (a).
– Kerrotaan luvut keskenään.
– Jaetaan saatu tulos kahdella.

$$A = \frac{h \cdot a}{2}$$



Esimerkki 8

Laske kolmion pinta-ala, kun kateettien pituus on 3 m.



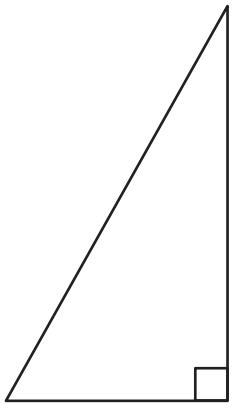
$$A = \frac{h \cdot a}{2}$$

$$= \frac{3\ \text{m} \cdot 3\ \text{m}}{2}$$

$$= \frac{9\ \text{m}^2}{2} = 4{,}5\ \text{m}^2$$

Esimerkki 9

Laske kolmion pinta-ala, kun kannan pituus on 30 cm ja korkeus 50 cm.



$$A = \frac{h \cdot a}{2}$$

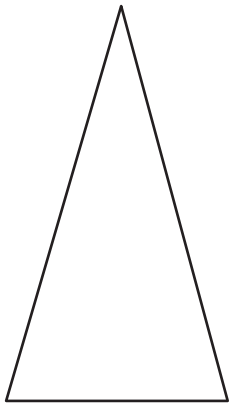
$$= \frac{30\ \text{cm} \cdot 50\ \text{cm}}{2}$$

$$= \frac{1500\ \text{cm}^2}{2}$$

$$= 750\ \text{cm}^2$$

Esimerkki 10

Tasakylkisen kolmion kanta on 1,5 m ja korkeus 3 m. Laske kolmion ala.



$$A = \frac{h \cdot a}{2}$$

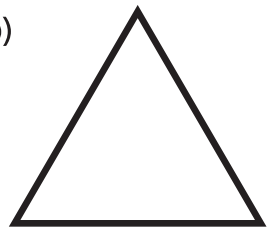
$$= \frac{1{,}5\ \text{m} \cdot 3\ \text{m}}{2}$$

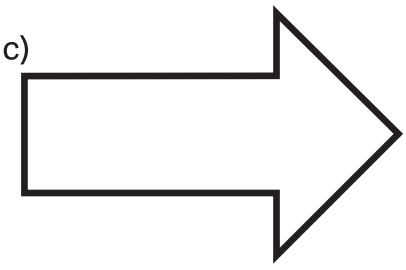
$$= \frac{4{,}5\ \text{m}^2}{2} = 2{,}25\ \text{m}^2$$

Tehtäviä

1. Mittaa ja laske kuvioiden pinta-alat.

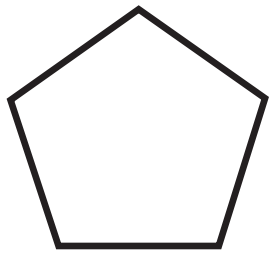
a)

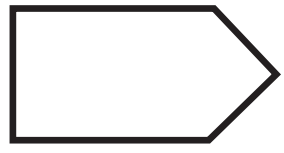
b) 

c) 

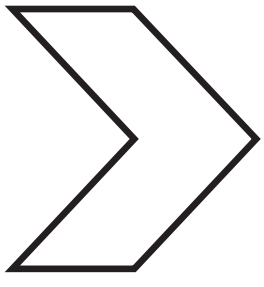
2. Mittaa ja laske kuvioiden pinta-alat.

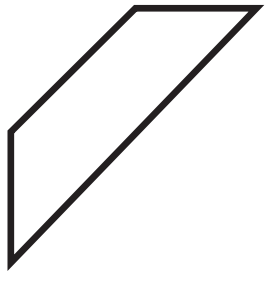
a)

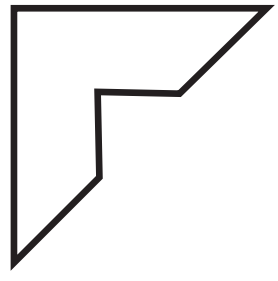
b) 

c) 

3. Mittaa ja laske kuvioiden pinta-alat ja piirit.

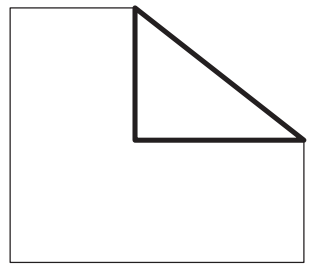
a) 

b) 

c) 

4. Jos kolmion pinta-ala on 15 m^2 ja kannan pituus 10 m, mikä on kolmion korkeus?

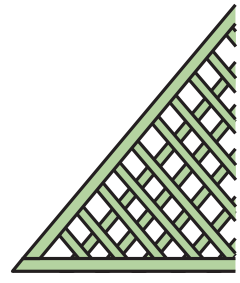
5. Varastohallin kulmaukseen tarvitaan kuvan mukainen metallilevypohjainen säilytystila. Kulmauksen lyhyempien seinien pituudet ovat 5 000 mm ja 6 000 mm. Mikä on tilan pinta-ala?



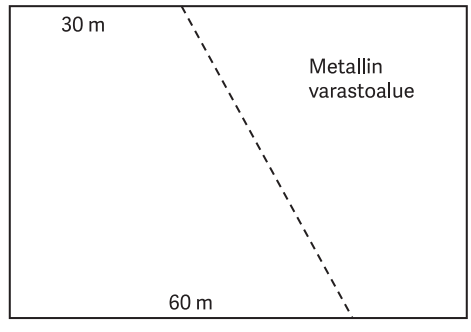
6. Jos kolmion korkeus on 2 m ja pinta-ala 2 m^2, mikä on kolmion kannan pituus?

7. Jos kolmion kannan pituus on 3 m ja pinta-ala 4,5 m^2, mikä on kolmion korkeus?

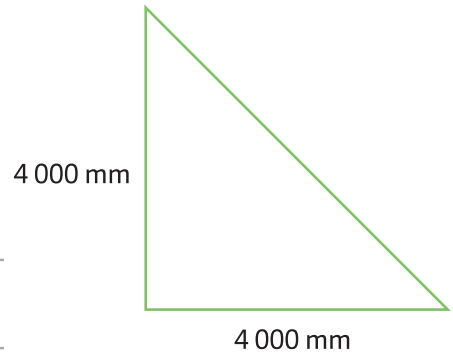
8. Terassille halutaan metallinen, taottu tilanjakaja, josta tehdään kolmion mallinen. Tilanjakajasta tulee 2 500 mm leveä, ja korkeimmalta kohdalta sen korkeus on 3 000 mm. Mikä on tilanjakajan pinta-ala?



9. Tontille halutaan rajata alue metallin varastointia varten kuvan mukaisesti. Tontin sivut ovat mitoiltaan 50 m ja 80 m. Mikä tulee varastoalueen pinta-alaksi?

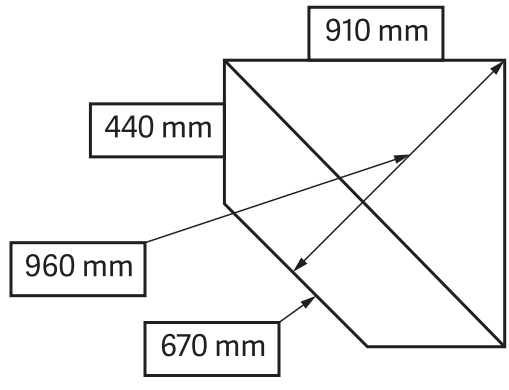


10. Rakennetaan kuvan mukainen kolmion mallinen mainoskyltti alumiinilevyistä, joiden koko on 1 250 mm x 2 500 mm. Kuinka monta levyä laskennallisesti tarvitaan kyltin rakentamiseen?



11. Metsäpalsta on kolmion muotoinen: kanta on 400 m ja korkeus 600 m. Taimia pitää istuttaa 2 000 kpl/ha. Kuinka monta tainta istutetaan?

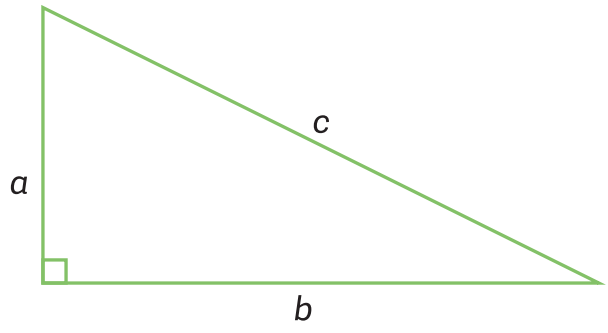
12. Kuinka paljon 20 m^2:n kokoisen huoneen pinta-ala pienenee, jos huoneeseen asennetaan kulmatakka, jonka mitat ovat kuvan mukaiset?



Pythagoraan lause

Pythagoraan lauseen avulla voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta yhden sivun pituus, kun tiedetään kolmion kahden muun sivun pituudet. Tärkeää on osata nimetä suorakulmaisen kolmion sivut: kaksi lyhyempää sivua ovat kateetteja, ja pisintä sivua kutsutaan hypotenuusaksi.

Merkitään sivujen pituuksia kuvan mukaisesti symboleilla a, b ja c.



Pythagoraan lause voidaan nyt esittää muodossa $c^2 = a^2 + b^2$, joka voidaan esittää myös seuraavan huoneentaulun muodossa:

Työsalin huoneentaulu

Hypotenuusan neliö on kateettien neliöiden summa.

Matemaattisena kaavana esitettynä lause voi vaikuttaa hieman vaikealta, mutta käytännössä sivujen pituuksien laskemiseen ei vaadita kuin hieman harjoittelua.

Esimerkki 11

Määritä hypotenuusan pituus, kun kateettien pituudet ovat 6 m ja 8 m.

Tässä kysytty asia on hypotenuusan pituus c. Sijoitetaan kateettien pituudet edellä esitettyyn lauseeseen. Saadaan yhtälö, joka ratkaistaan seuraavasti:

$c^2 = (6\ \text{m})^2 + (8\ \text{m})^2$

$c^2 = 6^2\ \text{m}^2 + 8^2\ \text{m}^2$

$c^2 = 36\ \text{m}^2 + 64\ \text{m}^2$

$c^2 = 100\ \text{m}^2$

$c^2 = \sqrt{100\ \text{m}^2} = 10\ \text{m}$

Vastaus:
Hypotenuusan pituus on 10 metriä.

Esimerkki 12

Määritä toisen kateetin pituus, kun hypotenuusan pituus on 50 metriä ja toisen kateetin pituus on 16 metriä.

Nyt on järkevintä lukea Pythagoraan lause toisesta suunnasta. Sijoitetaan tunnetut arvot yhtälöön ja ratkaistaan se yhtälön ratkaisusääntöjen mukaisesti:

$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + (16\ \text{m})^2 = (50\ \text{m})^2$

$a^2 = (50\ \text{m})^2 - (16\ \text{m})^2$

$a^2 = 2\ 244\ \text{m}^2$

$a^2 = \sqrt{2\ 244\ \text{m}^2} = 47{,}3708\ \text{m} \approx 47\ \text{m}$

Vastaus:
Toisen kateetin pituus on siis noin 47 metriä.

Esimerkki 13

Hypotenuusan pituus on 6,0 m. Kateetit ovat samanmittaiset, mutta kuinka pitkiä ne ovat?

Ratkaisu:

Merkitään molempien kateettien pituutta a:lla, koska niiden tiedetään olevan samanmittaisia. Pythagoraan lausetta käyttäen saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaista kateetin pituus:

$a^2 + a^2 = (6\ \text{m})^2$

$2a^2 = 36\ \text{m}^2$

$a^2 = 18\ \text{m}^2$

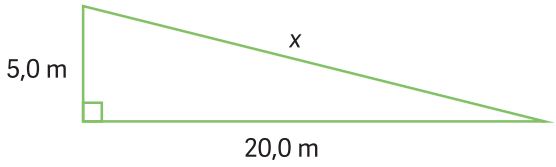
$a = \sqrt{18\ \text{m}^2} = 4{,}242\ldots\ \text{m} \approx 4{,}2\ \text{m}$

Vastaus: Kateettien pituus on noin 4,2 metriä.

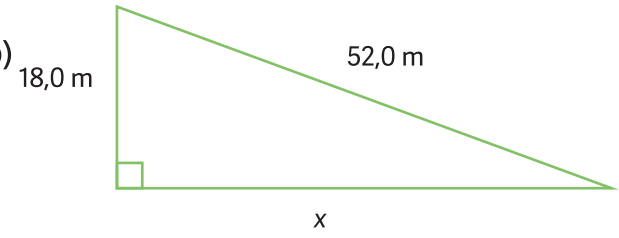
Tehtäviä

1. Määritä tuntemattoman sivun pituus.

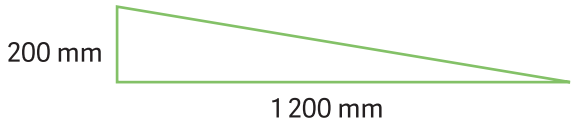
a)



b)



2. Kuinka monta metriä kooltaan 40 x 40 x 3 neliöputkea tarvitaan, kun tehdään neljä tukea oven päälliselle lipalle, jonka mitat ovat kuvan mukaiset?



3. Kuinka pitkä on matka torin vastakkaisten kulmien välillä, jos tori on

a) neliön mallinen ja sivun pituus on 15 m

b) suorakulmion mallinen ja sivujen pituudet ovat 15 m ja 25 m?

4. Laske seuraavien suorakulmaisten kolmioiden hypotenuusan pituus:

a) Kolmion kateettien pituudet ovat 1 m ja 2 m.

b) Kolmion kateettien pituudet ovat 0,8 m ja 1,2 m.

c) Kolmion kateettien pituudet ovat 0,3 m ja 2,4 m.

5. Laske seuraavien suorakulmaisten kolmioiden hypotenuusan pituus:

a) Kolmion molempien kateettien pituus on 20 cm.

b) Kolmion molempien kateettien pituus on 1,5 m.

c) Kolmion molempien kateettien pituus on 0,8 m.

6. Laske suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituus, jos hypotenuusan pituus on 4,2 m ja toisen kateetin pituus on

a) 1 m

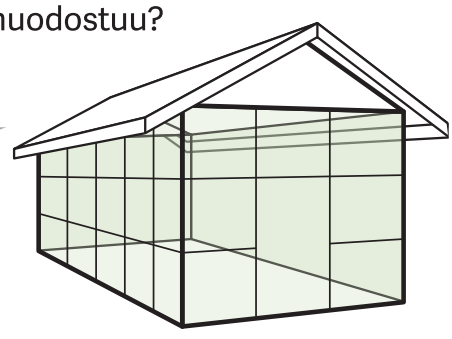
b) 2 m

c) 3 m.

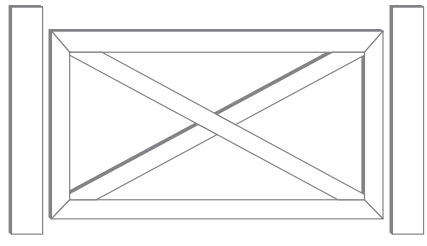
7. Tasasivuisen kolmion sivut ovat 2 m:n pituiset. Laske kolmion ala.

8. Rosterista hitsatun kehikon sivut mitattiin ja saatiin seuraavat mittaustulokset: kehikon pituus 7 400 mm, korkeus 3 400 mm ja ristimitta 8 400 mm. Oliko kehikko suora?

9. Rakennetaan kasvihuone, jonka leveys on 2,5 m ja pituus 5 m. Harjakorkeudeksi halutaan 2,6 m ja sivuseinien korkeudeksi 2 m. Räystään pituudeksi halutaan 40 cm. Kuinka pitkäksi lape muodostuu?

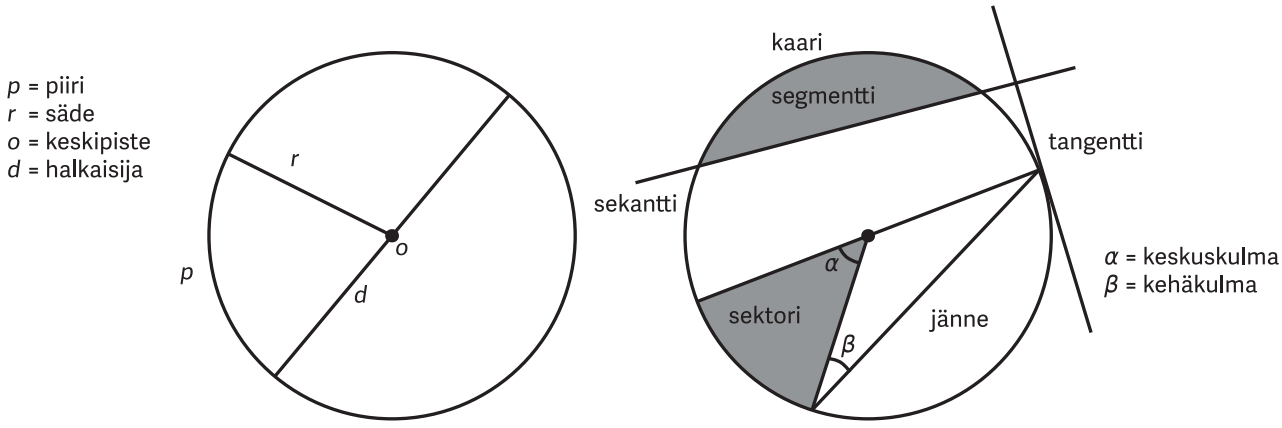


10. Tehdään kuvan mukaisia aitaelementtejä, joiden ulkomitat ovat seuraavat: leveys 1,5 m ja korkeus 1,0 m. Käytetty putki on mitoiltaan 2,5 cm x 2,5 cm. Kuinka pitkiä ristitukien pitää olla?



Ympyrä

Ympyrän peruskäsitteet



Piiri (*p*) = ympyrän kehä. Piiri on π-kertainen halkaisijaan nähden.
Jänne = kahden kehällä olevan pisteen välinen jana.
Sektori = kahden säteen rajaama alue.
Kaari = kahden ympyrän kehältä valitun pisteen välinen osa piiristä.
Segmentti = jänteen ja kaaren rajoittama alue.
Sekantti = suora, joka leikkaa ympyrän kehän kahdesta pisteestä.
Tangentti = suora, jolla on yksi yhteinen piste ympyrän kanssa.
Tangentti on kohtisuorassa sädettä vastaan.

Tehtävä: Mittaa ympyrän muotoisten esineiden ympärysmitat (eli piirit) ja halkaisijat. Kirjaa tulokset taulukkoon. Laske sitten piirin ja halkaisijan suhde.

Esine	Ympärysmitta	Halkaisija	Ympärysmitta : halkaisija

Ympärysmitan ja halkaisijan suhteen pitäisi olla lähellä π:tä (eli noin 3,14). Ympärysmitta on siis π-kertainen halkaisijaan nähden. Tästä saadaan piirille laskukaava:

$$p = \pi \cdot d \text{ tai } p = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Ympyrän pinta-ala

Ympyrän pinta-ala (A) voidaan laskea, jos tiedetään ympyrän säde tai halkaisija.
Ympyrän pinta-alan kaava on

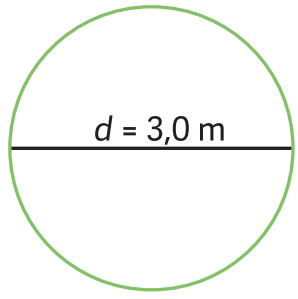
$$A = \pi \cdot r^2$$

Esimerkki 14

Ympyrän halkaisija on 3 metriä. Laske ympyrän

a) piiri

b) pinta-ala.



Ratkaisu:

a) $p = \pi \cdot 3{,}0\ \text{m} = 9{,}42477\ldots\ \text{m} \approx 9{,}42\ \text{m}$

b) Pinta-alaa laskettaessa tarvitaan säteen pituus, joka on puolet halkaisijasta, eli $r = 1{,}5$ m.

$A = \pi \cdot (1{,}5\ \text{m})^2 = 7{,}06858\ldots\ \text{m}^2 \approx 7{,}1\ \text{m}^2$

Tehtäviä

1. Laske ympyrän kehän pituus, kun ympyrän

a) halkaisija on 6 m _____

b) säde on 2,5 cm. _____

2. Laske ympyrän pinta-ala, kun sen

a) säde on 5 m _____

b) halkaisija on 15 cm. _____

3. Laske ympyrän halkaisija, kun kehän pituus on

a) 5 m

b) 350 cm.

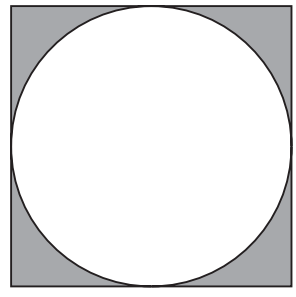
4. Pyörötangon halkaisija on 6 mm. Kuinka suuri on poikkileikkauksen pinta-ala?

5. Paperitelan halkaisija on tyhjänä 30 cm. Kun siihen on hetki kierretty paperia, sen halkaisijaksi tulee 50 cm. Paperin paksuus on 0,1 mm. Kuinka monta kierrosta paperia telalle on kierretty?

6. Saumattoman kuumavalssatun teräsputken halkaisija on 51 mm ja sisähalkaisija 45,2 mm. Laske putken poikkileikkauksen pinta-ala.

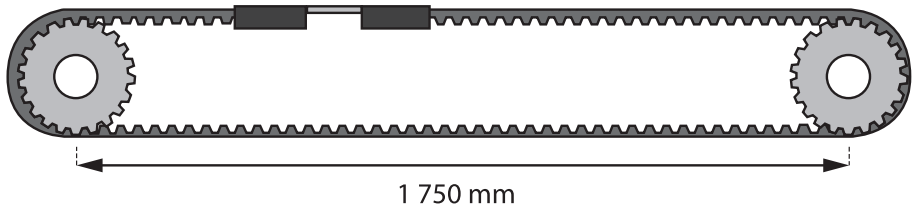
7. Köyttä on kierretty 250 mm leveän telan päälle yhteen kerrokseen. Kuinka monta metriä köyttä on telalla, kun köyden halkaisija on 15 mm? Telan halkaisija on 300 mm.

8. Laske viereisen kuvion harmaan alueen pinta-ala, kun neliön sivun pituus on 300 mm.



9. Kuinka monta ympyrän muotoista palaa saadaan leikattua suorakulmaisesta levystä, jonka leveys on 300 mm ja pituus 500 mm? Ympyrän halkaisijan pitää olla 30 mm.

10. Alla on kuva hihnasta, jonka hihnapyörien keskiöväli on 1 750 mm ja hihnapyörien halkaisija on 150 mm.



a) Kuinka monta metriä on hihnan pituus?

b) Kuinka monta kertaa hihnapyörät ehtivät pyöriä hihnan pyörähtäessä ympäri?

11. Edellisen tehtävän hihnapyörien nopeus on 15 kierrosta/min. Kuinka monta metriä hihna liikkuu minuutin aikana?

12. Kuinka monta prosenttia ympyrän pinta-ala kasvaa, kun halkaisija kasvaa 20 %?

13. Johda pyörintänopeuden kaava lastuavaan työstöön: $n = \frac{v}{\pi \cdot d}$

Kaavassa

v = lastuamisnopeus(m/min)

d = kappaleen halkaisija metreissä

n = kierrosnopeus(1/min).

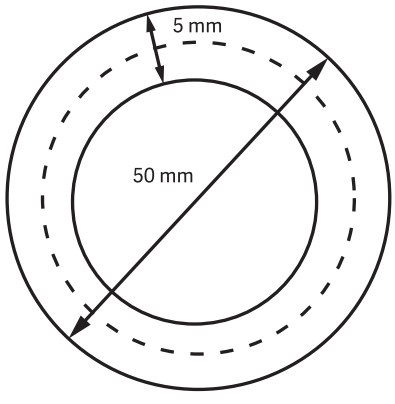
14. Lastuamisnopeudeksi haluttiin 25 m/min, kun kovaa terästä porataan 15 mm:n poralla. Laske poran oikea pyörimisnopeus.

15. Sorvaat pyörötankoa (säde 60 mm), ja olet katsonut taulukosta sopivaksi lastuamisnopeudeksi 170 m/min. Kuinka kovaksi säädät sorvin kierrokset?

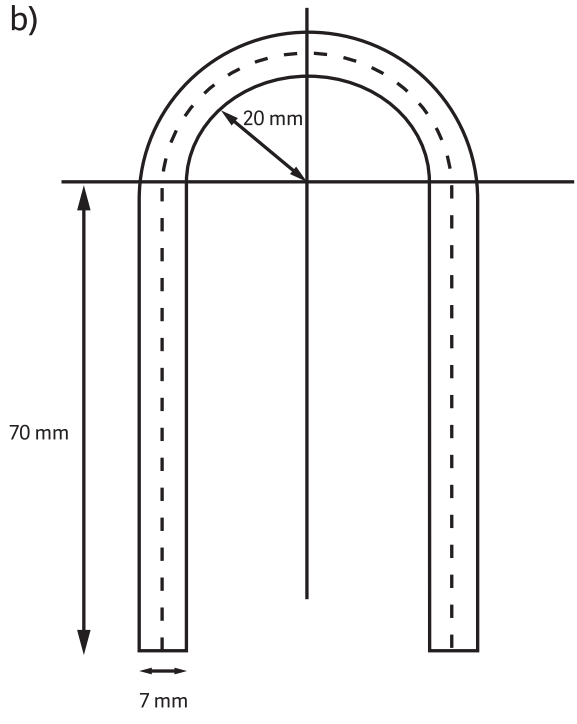
16. Vettä tulee kahdesta putkesta, joiden halkaisijat ovat 75 mm. Putket halutaan korvata yhdellä putkella. Mikä tämän putken halkaisijan on oltava?

17. Laske alla olevien putken oikaisujen pituus (keskiviivan mukaan).

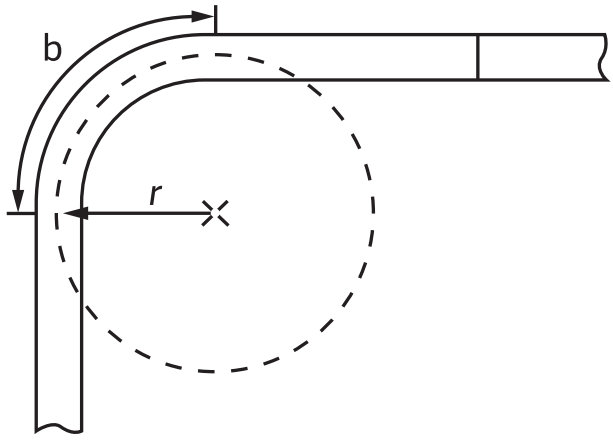
a)



b)

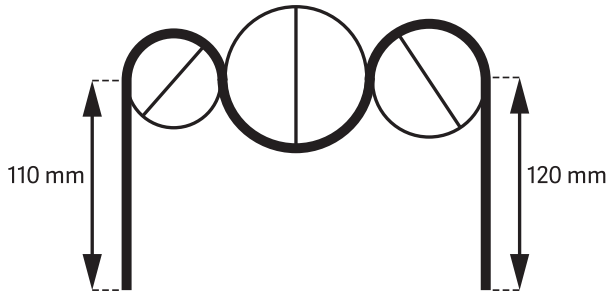


18. Putken taivutussäde on 70 mm. Mikä on tällöin kaaren *b* pituus?



19. Ympyrän muotoiseen sylinteriin on porattava reikä, jonka ala on puolet sylinterin poikkileikkausalasta. Kuinka suuri reiän halkaisijan pitää olla? Sylinterin halkaisija on 120 mm.

20. Mikä on kuvan hihnan pituus, kun sylinterien halkaisijoiden pituudet ovat seuraavat: *D1* = 10 mm, *D2* = 15 mm ja *D3* = 12 mm.



Avaruusgeometria

Avaruusgeometrialla tarkoitetaan kolmiulotteisten kappaleiden geometriaa.
Kaikki kappaleet, joihin kosket, ovat kolmiulotteisia.

Kolmiulotteiset kappaleet voidaan jakaa monella tavalla eri kategorioihin. Yleinen tapa on jakaa kappaleet neljään päälajiin, jotka edelleen jakaantuvat pienempiin osiin. Avaruuskappaleiden päälajit ovat 1. lieriöt, 2. kartiot, 3. pallot ja 4. muut.

1. Lieriö

Lieriöllä on kaksi yhdensuuntaista ja yhtenevää pohjaa sekä vaippa:

– Suorassa lieriössä vaippa on kohtisuorassa pohjaa vasten.

– Vinossa lieriössä vaippa ei ole kohtisuorassa pohjaa vasten.

Alla olevista lieriöistä a, b, d, e, f, g, h, i, j ja k ovat suoria. Lieriöt c ja l ovat vinoja.

– Ympyrälieriön eli sylinterin pohja on ympyrä.

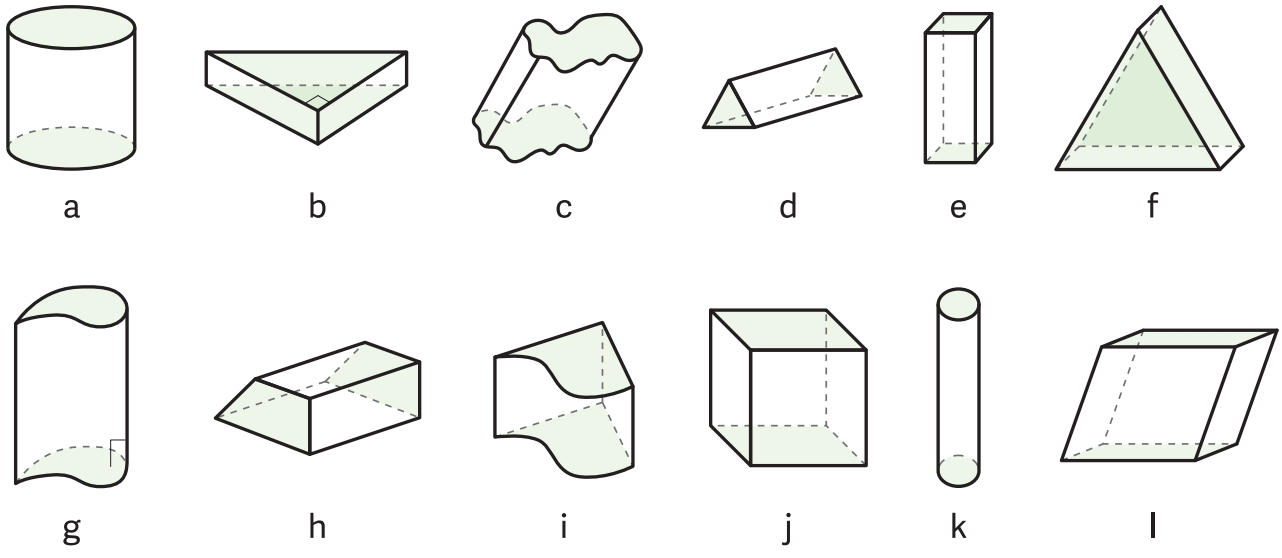
– Särmiössä eli prismassa pohja on monikulmio.

Alla olevista lieriöistä a ja k ovat ympyrälieriöitä. Lieriöt b, d, e, f, h, j ja l ovat särmiöitä.

– Suorakulmainen särmiö koostuu kuudesta tahkosta. Lisäksi kaikki kulmat ovat 90°.

– Kuutiossa jokainen särmä eli sivu on yhtä pitkä.

Alla olevista lieriöistä e ja j ovat suorakulmaisia särmiöitä. Lieriö j on kuutio.



2. Kartio

Kartiossa on yksi pohja, huippu eli kärki ja näiden väliin jäävä pinta, jota sanotaan vaipaksi:

– Suorassa kartiossa kärkipiste on suoraan pohjan keskipisteen yläpuolella.

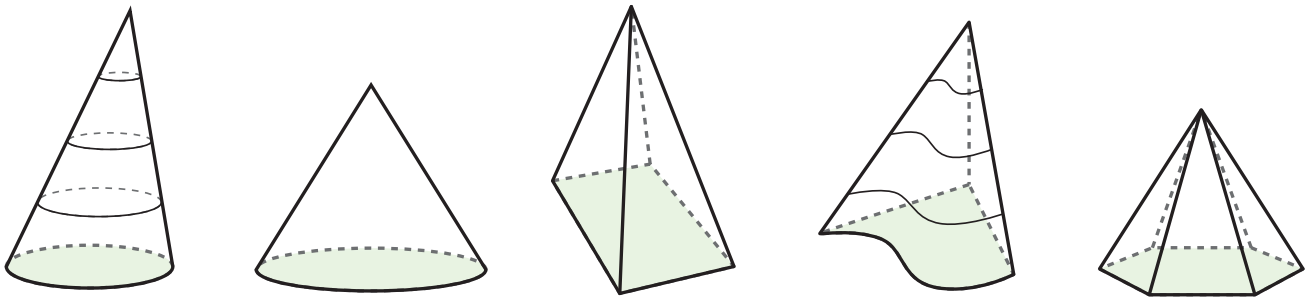
– Vinossa kartiossa kärkipiste ei ole pohjan keskipisteen yläpuolella.

Alla olevista kartioista suoria ovat kartiot b, c ja e. Muut ovat vinoja.

– Pyramidin pohja on monikulmio.

– Ympyräkartion pohja on ympyrä.

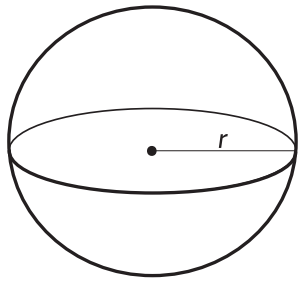
Alla olevista kartioista c ja e ovat pyramideja. Kartiot a ja b taas ovat ympyräpohjaisia.



a b c d e

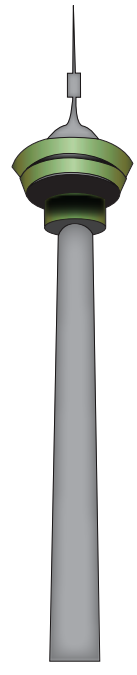
3. Pallo

Pallo muodostuu avaruuden niistä pisteistä,jotka ovat yhtä kaukana kiinteästä keskipisteestä.



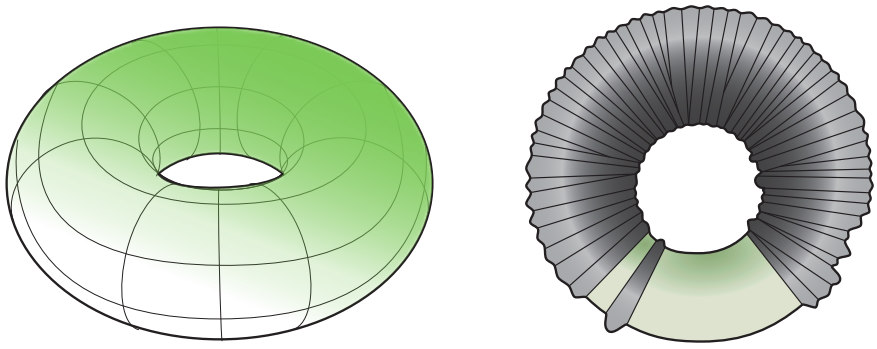
4. Muut

Tähän kategoriaan voidaan sijoittaa kaikki sellaiset kappaleet, jotka eivät täytä lieriön, kartion tai pallon määritelmän vaatimuksia. Melkein kaikki oikean elämän kappaleet kuuluvat tähän ryhmään. Usein kappale voidaan kuitenkin leikata osiin siten, että leikatut osat kuuluvat edellä mainittuihin kolmeen ryhmään.



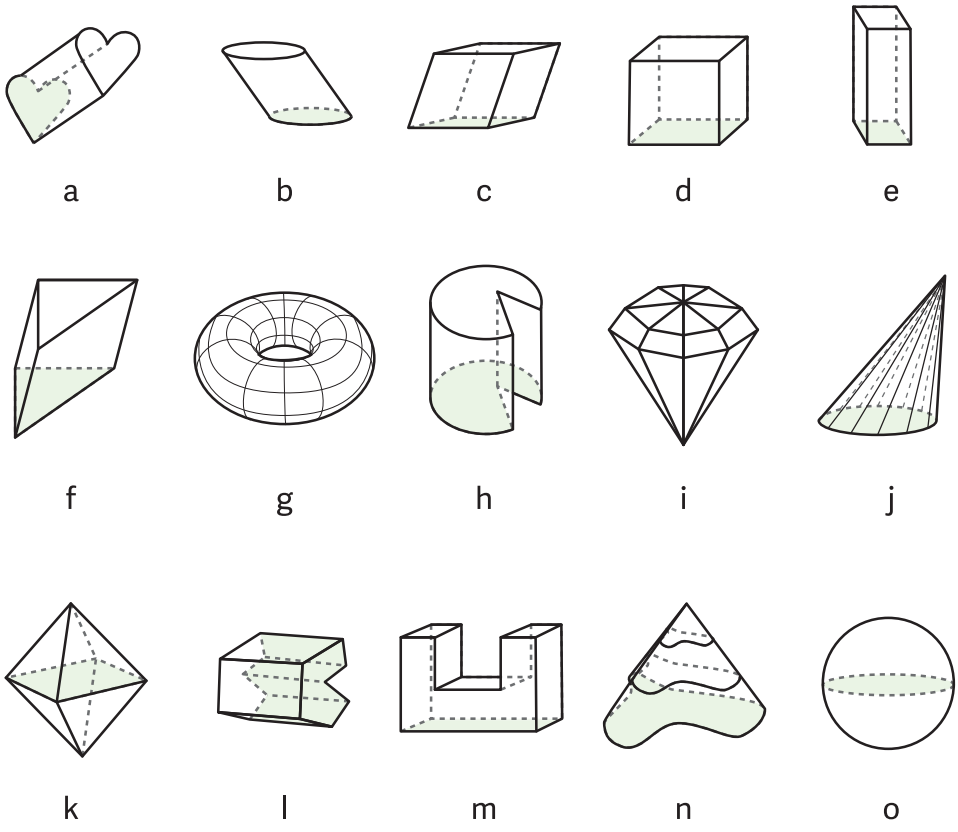
Kuvassa oikealla on Tampereen Näsinneula. Sen voidaan ajatella rakentuvan erikokoisista lieriöistä. Tarkempiin tuloksiin päästään, kun tornin ajatellaan rakentuvan erikokoisista katkaistuista ympyräkartioista.

Alla olevassa kuvassa vasemmalla on torus. Se on munkkirinkilän tai auton sisärenkaan muotoinen avaruuskappale. Käämi voidaan joskus rakentaa toruksen muotoiseksi (kuvassa oikealla).



Tehtäviä

1. Luokittele alla olevat kappaleet lieriöihin, kartioihin, palloihin ja muihin kappaleisiin. (Kirjoita kirjain vastausviivalle.)



Lieriöt: _____ Kartiot: _____

Pallot: _____ Muut: _____

2. Luokittele tehtävän 1 kappaleet alla oleviin luokkiin. (Kirjoita kirjain vastausviivalle.)

Suora lieriö _____ Vino lieriö _____

Särmiö _____ Suora pyramidi _____

Pyramidi _____ Ympyräkartio _____

Kuutio _____ Suora ympyrälieriö _____

Ympyrälieriö _____ Suorakulmio _____

Suorakulmainen särmiö _____ Neliö _____

3. Piirrä vihkoosi jokin seuraavista kappaleista:

a) lieriö

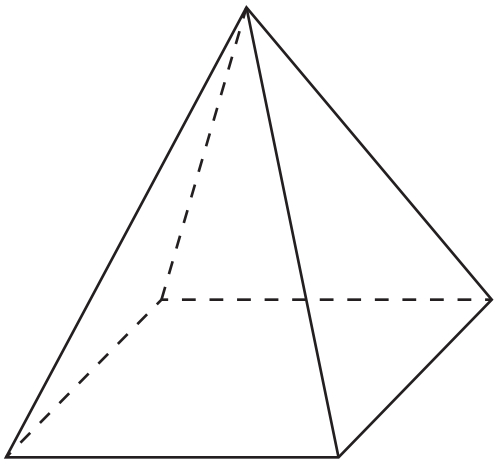
b) suora ympyräkartio

c) prisma

d) avaruuskappale, joka ei ole lieriö, kartio eikä pallo.

4. Oheisessa kuvassa on neliöpohjainen suora pyramidi.

a) Piirrä pyramidille korkeusjana ja mittaa pyramidin korkeus viivoittimella.



b) Laske pyramidin pohjan pinta-ala. Mittaa viivoittimella puuttuvat arvot.

_____

_____

_____

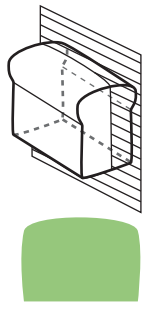
_____

_____

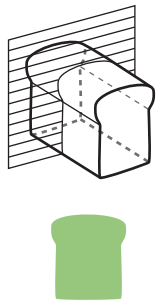
Huom.! Särmän pituus tarkoittaa avaruuskappaleen suoran sivun pituutta.

5. Piirrä vihkoosi sen leikkauskuvion muoto, joka syntyy, kun kappale leikataan tason mukaisesti. Kohdat a ja b on tehty malliksi.

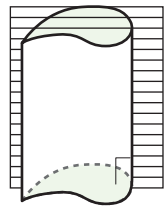
a)



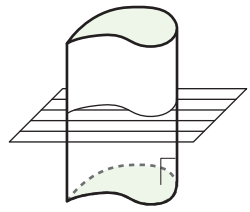
b)



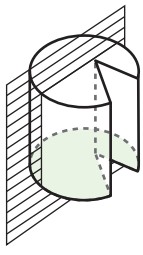
c)



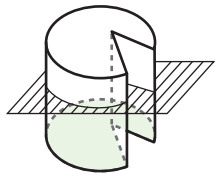
d)



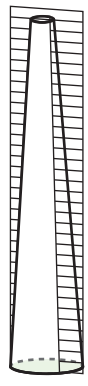
e)



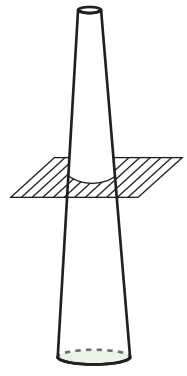
f)



g)

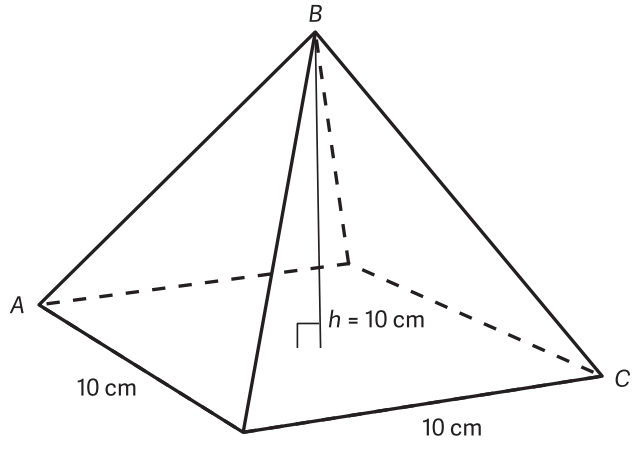


h)



6. Piirrä vihkoosi leikkauskuvio, joka syntyy, kun kuvan mukainen neliöpohjainen suora pyramidi leikataan pisteiden A, B, ja C kautta kulkevan tason suuntaisesti.

Laske Pythagoraan lausetta apuna käyttäen leikkauskuvioon sivujanojen suuruudet.

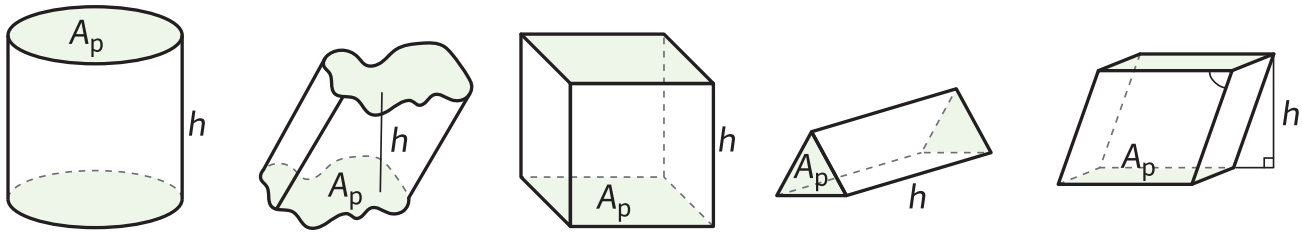


Lieriön tilavuus ja pinta-ala

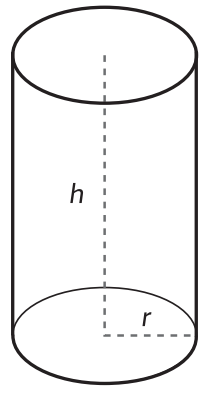
Lieriön tilavuus saadaan, kun pohjan pinta-ala kerrotaan lieriön korkeudella. Kaavana tämä on

$$V = A_p h$$

Lieriön pohjan pinta-alan laskutapa riippuu lieriön pohjan muodosta. Lieriön pinta-alalla tarkoitetaan pohjan ja vaipan pinta-alojen summaa.



Lieriön erikoistapaus 1: suora ympyräpohjainen lieriö eli sylinteri

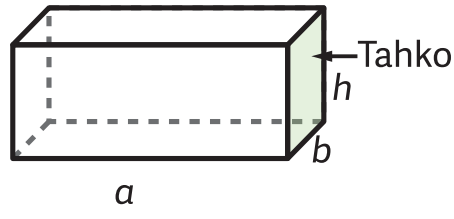


Ympyräpohjaisen lieriön tilavuus lasketaan samalla kaavalla $V = A_p h$ kuin muidenkin lieriöiden.

Lieriön pohja on ympyrä, joten pohjan pinta-ala saadaan kaavalla $A_p = \pi r^2$, jossa r on pohjan säde.

Sylinterin vaipan pinta-ala saadaan kaavalla $A_v = 2\pi rh$.

Lieriön erikoistapaus 2: suorakulmainen särmiö



Suorakulmaisen särmiön tilavuus lasketaan samalla kaavalla $V = A_p h$ kuin muidenkin lieriöiden.

Lieriön pohja on suorakulmio, joten pohjan pinta-ala saadaan kaavalla $A_p = ab$, jossa a ja b ovat pohjan eri sivujen pituuksia. Yhdistämällä tämä kaavaan $V = A_p h$, saadaan suorakulmaisen särmiön tilavuus kaavalla

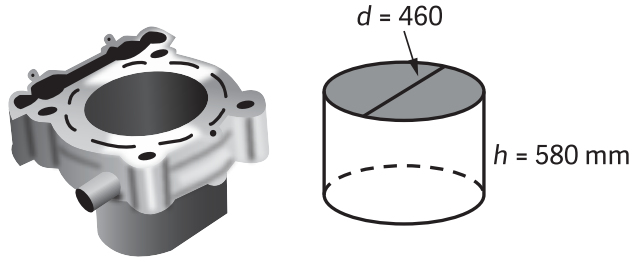
$V = abh$.

Suorakulmaisen särmiön pinta-alalla tarkoitetaan kaikkien kuuden tahkon pinta-alojen summaa.

Esimerkki 15

Laivoissa ja voimalaitoksissa käytettävän Wärtsilä 46 -moottorin yhden sylinterin halkaisija on 460 mm. Sylinterin syvyys on 580 mm. Kuinka suuri on sylinterin tilavuus?

Ratkaisu:



Halkaisija = 0,46 m, joten säde

$$r = \frac{0{,}46\ \text{m}}{2} = 0{,}23\ \text{m}.$$

Syvyys (eli korkeus) = 0,58 m.

$A_{\text{pohja}} = \pi r^2$

$= \pi \cdot (0{,}23\ \text{m})^2$

$= 0{,}166\,190\ \text{m}^2$

$V = A_{\text{pohja}} h$

$= 0{,}166\,190\ \text{m}^2 \cdot 0{,}58\ \text{m}$

$= 0{,}096\,390\ \text{m}^3$

$= 96{,}4$ litraa

Vastaus:

Sylinterin tilavuus on 96,4 litraa.

Esimerkki 16

Suorakulmaisen särmiön muotoisen teräksisen palo-oven leveys on 1 200 mm, sen korkeus on 2 000 mm, ja siinä on kaksi kerrosta 2 mm vahvaa terästä. Työnjohtaja haluaa tietää oven massan, jotta hän voi arvioida sen siirtämiseen tarvittavien työntekijöiden määrän. Kuinka paljon ovi vähintään painaa, jos teräksen tiheys on 7,8 kg/dm^3?

Ratkaisu:

Teräsmäärää voidaan pitää suorakulmaisen särmiön muotoisena kappaleena.

Koska ovessa on kaksi kerrosta 2 mm vahvaa terästä, voidaan särmiön mittojen ajatella olevan

1,2 m x 2,0 m x 0,004 m.

Tällöin ovessa on terästä 1,2 m · 2,0 m · 0,004 m = 0,0096 m^3. Tämä on 9,6 dm^3.

Oven massa saadaan kertomalla tiheys tilavuudella eli

$m = 7{,}8\ \text{kg/dm}^3 \cdot 9{,}6\ \text{dm}^3 = 74{,}88\ \text{kg}.$

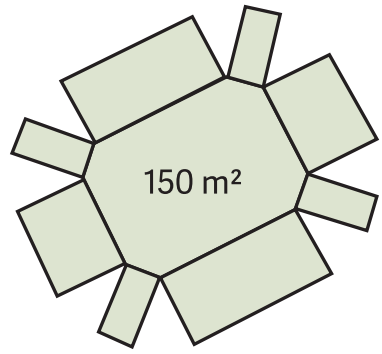
Vastaus: Ovi painaa vähintään noin 75 kg.

Esimerkki 17

Tehtaaseen tilattiin suuri ruostumattomasta teräksestä valmistettu astia. Astian sisäosan valmistukseen tarvitaan yhteensä 150 m^2 terästä. Teräksen paksuus on 3,0 mm.

a) Mikä on tarvittavan teräsmäärän tilavuus?
Anna vastaus litroina.

b) Kuinka paljon teräs tulee painamaan, kun yksi litra sulaa terästä painaa 7,85 kg?



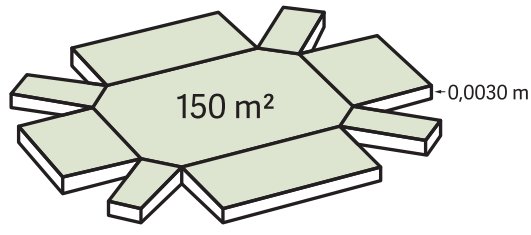
Ratkaisu:

a) Muunnetaan teräksen paksuus metreiksi:

m kilometri	hm hehtometri	dam dekametri	m metri	dm desimetri	cm senttimetri	mm millimetri

3,0 mm = 0,0030 m

Tarvittavaa teräsmäärää voidaan käsitellä lieriönä, jonka pohjan pinta-ala on 150 m^2 ja korkeus 0,0030 m.



Sijoitetaan nämä tilavuuden kaavaan $V = A_p h$.

$V = 150\ \text{m}^2 \cdot 0{,}0030\ \text{m} = 0{,}45\ \text{m}^3$.

Muunnetaan tämä lopuksi litroiksi.

m^3			dm^3			cm^3			mm^3

kl	hl	dal	l litra	dl	cl	ml

0,45 m^3 = 450 dm^3 = 450 litraa

Vastaus: Tarvittavan teräsmäärän tilavuus on 450 litraa.

b) 1 litra sulaa terästä painaa 7,85 kg, joten tarvittavan teräsmäärän massa on

450 litraa · 7,85 kg/litra = 3 532,5 kg

Vastaus: Teräksen paino on noin 3 500 kg.

Tehtäviä

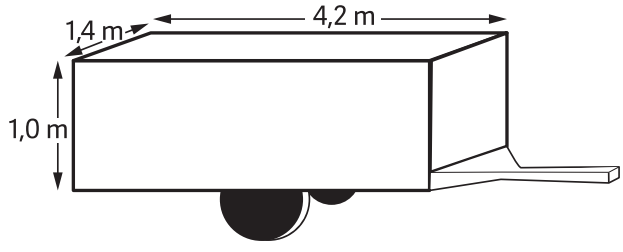
1. Rakennukseen tulevan saunan lattiapinta-ala on 9 m^2. Kuinka monta kuutiometriä saunassa on ilmaa, jos saunan korkeus on 2,5 m. (Saunan voidaan ajatella olevan lieriön muotoinen avaruuskappale.)

2. Rakennuksen väestönsuojaan tulee teräksestä valmistettu ovi. Rakennuttaja haluaa tietää, voiko oven kuljettaa peräkärryllä, jonka maksimikuorma on 500 kg.

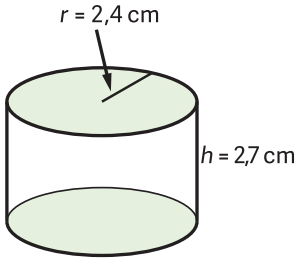
a) Kuinka monta litraa oven valmistamiseen kuluu terästä?

b) Ylittääkö oven massa peräkärryn maksimikuorman?
Teräksen tiheys on 7,85 kg/dm^3.

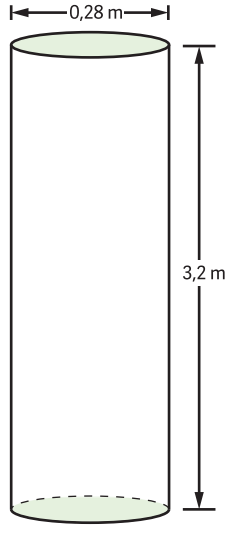
3. Laske, kuinka monta kuutiometriä on kuvan peräkärryn kuormatilan tilavuus.



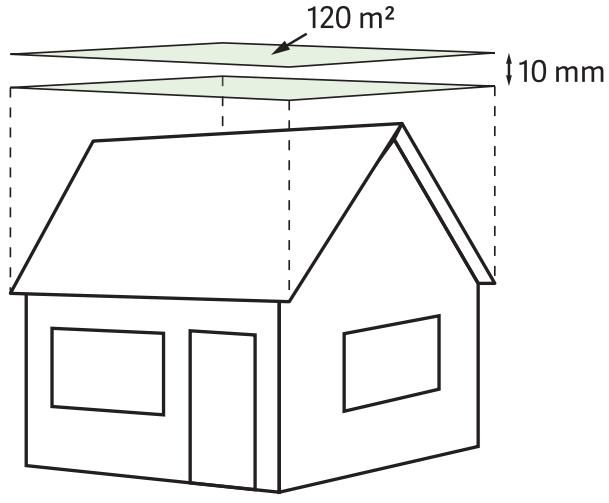
4. Laske, kuinka monta kuutiosenttimetriä on kuvassa olevan mopon sylinterin tilavuus. *(Vihje: Laske ensin pohjan ala ja kerro se sitten korkeudella.)*



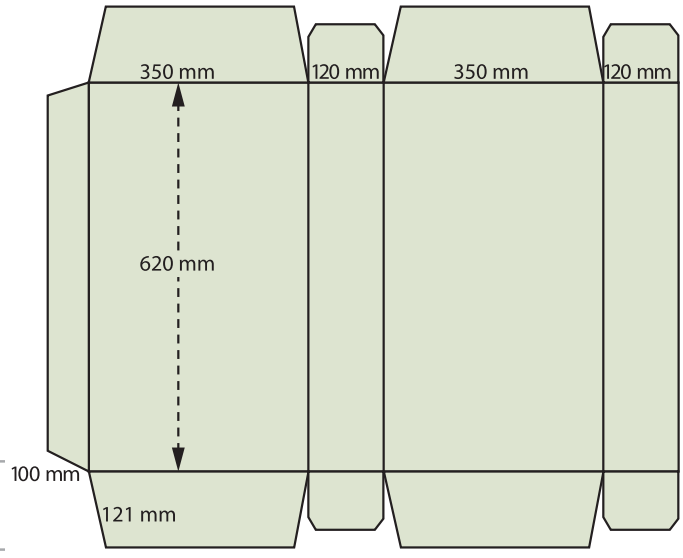
5. Laske, kuinka suuri on kuvan mukaisen pylvään tilavuus. Anna vastaus kuutiometreinä. *(Vihje: Laske ensin ympyräpohjan säde.)*



6. Talon katon pinta-ala pystysuoraan ylhäältä päin katsottuna on noin 120 m^2. Säätiedotuksen mukaan yhden tunnin aikana sataa 10 mm vettä. Talossa on neljä vesikourua (ränniä). Kuinka monta litraa vettä yhdestä korusta tunnin aikana tulee, jos säätiedotus toteutuu ja vesi jakaantuu tasaisesti vesikourujen kesken?



7. Huutokaupattavana oli koottavia muovisia laatikoita. Laatikon tilavuutta ei kerrottu, mutta laatikon levityskuvaan oli merkitty joitain mittoja. Kuinka monta litraa kuvan laatikon tilavuus on? *(Vihje: Muunna mitat senttimetreiksi. Hahmottele sen jälkeen kappaleen kokoa käsilläsi. Tällä menettelyllä voit tarkistaa, onko vastauksessasi järkeä.)*



8. Tehtävässä 5 olevaa pylvästä voidaan pitää ympyräpohjaisen lieriön muotoisena. Yritys valmistaa tällaisia pylväitä 20 kappaletta. Kuinka paljon maalia tarvitaan niiden maalaamiseen, jos lieriöistä maalataan pelkästään niiden vaippa? Maalipurkissa on merkintä 7 m^2/litra.

9. Suunnitelmissa on rakentaa metallinen työkaluvaunu, jossa on suorakulmaisen särmiön muotoinen lokerikko. Lokerikon tilavuudeksi haluttiin 20 litraa. Lokerikon leveys on 450 mm ja syvyys 250 mm. Kuinka korkea lokerikosta on tehtävä?

10. Johda

a) sylinterin tilavuuden laskukaava

$V = \pi r^2 h$

b) sylinterin vaipan pinta-alan laskukaava

$A_v = 2\pi r h$.

(Vihje: Rullaa esimerkiksi A4-kokoinen paperi rullalle ja mieti ympyrän- ja suorakulmion laskukaavojen avulla seuraavaa askelta.)

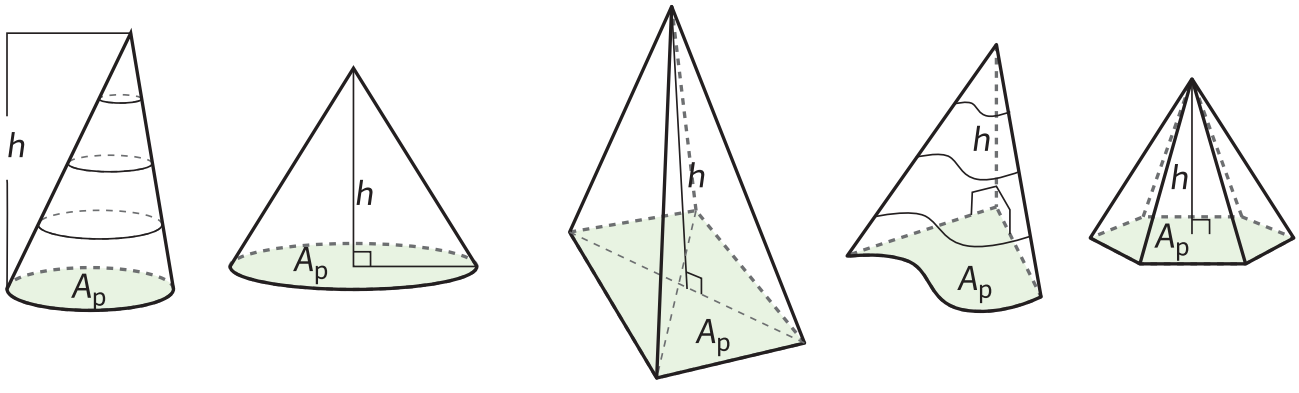
Kartion tilavuus ja pinta-ala

Kartion tilavuus saadaan, kun pohjan pinta-ala kerrotaan kartion korkeudella ja tulo jaetaan kolmella. Kaavana tämä on

$$V = \frac{A_p h}{3}$$

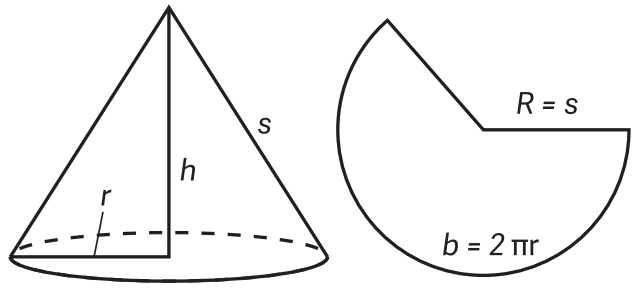
Kartion pohjan pinta-alan laskutapa riippuu kartion pohjan muodosta.

Kartion pinta-alalla tarkoitetaan pohjan ja vaipan pinta-alojen summaa.



Kartion erikoistapaus 1: suora ympyräpohjainen kartio

Suorassa ympyräpohjaisessa kartiossa pohja on ympyrä ja kärki on suoraan pohjaympyrän keskipisteen yläpuolella.



Suoran ympyräpohjaisen kartion tilavuus lasketaan samalla kaavalla

$V = \frac{A_p h}{3}$ kuin muidenkin kartioiden.

Kartion pohja on ympyrä, joten pohjan pinta-ala saadaan kaavalla $A_p = \pi r^2$, missä r on pohjan säde.

Suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala lasketaan kaavalla $A_v = \pi rs$.

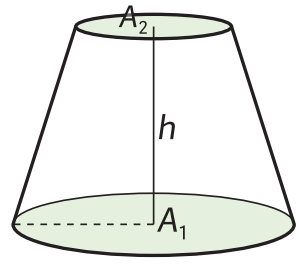
Kartion erikoistapaus 2: suora pyramidi

Pyramidin tilavuus lasketaan samalla kaavalla $V = \frac{A_p h}{3}$ kuin muidenkin kartioiden.

Kartion pohja on monikulmio, joten pohjan pinta-ala saadaan kaavalla monikulmion pinta-alojen laskukaavoilla. Pyramidin vaippa koostuu kolmion muotoisista tahkoista.

Kartion erikoistapaus 3: katkaistu kartio

Monet pylväät ja muut korkeat rakennelmat kapenevat ylöspäin mentäessä. Usein rakennelma ei kuitenkaan kapene pisteeksi, jolloin kappaleen voidaan ajatella olevan katkaistun kartion muotoinen.

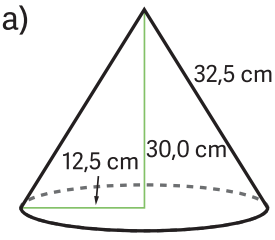


Katkaistun kartion tilavuus: $V = \frac{h(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2}{3}$.

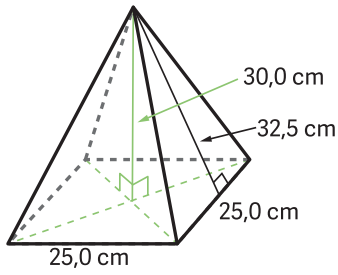
Esimerkki 18

Kuvissa on suoria kartioita sekä katkaistu kartio. Laske kappaleiden tilavuudet ja pinta-alat.

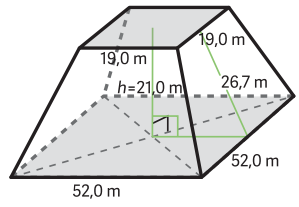
a)

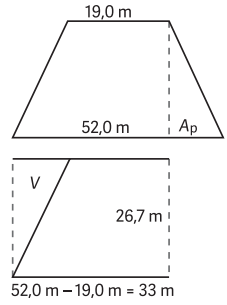


b)



c)





Ratkaisu:

a) $V = \frac{A_p h}{3}$

$A_p = \pi \cdot r^2$

$A_p = \pi \cdot (12{,}5\ \text{cm})^2$

$A_p \approx 490{,}874\ \text{cm}^2$

$V = \frac{490{,}874\ \text{cm}^2 \cdot 30{,}0\ \text{cm}}{3}$

$V = 4\,908{,}74\ \text{cm}^3$

$A_v = \pi rs$

$A_v = \pi \cdot 12{,}5\ \text{cm} \cdot 32{,}5\ \text{cm}$

$A_v = 1276{,}3\ \text{cm}^2$

Vastaus: Tilavuus on noin 4 910 cm³ ja pinta-ala noin 1 280 cm².

b) $V = \frac{A_p h}{3}$

$A_p = a^2$ (a = pohjaneliön sivun pituus)

$A_p = (25\ \text{cm})^2$

$A_p = 625\ \text{cm}^2$

$V = \frac{625\ \text{cm}^2 \cdot 30{,}0\ \text{cm}}{3}$

$V = 6\,250\ \text{cm}^3$

$A_v = 4 \cdot \frac{\text{"kanta} \cdot \text{korkeus"}}{2}$

”kanta · korkeus : 2”

$A_v = 4 \cdot \frac{25\ \text{cm} \cdot 32{,}5\ \text{cm}}{2}$

$A_v = 1625\ \text{cm}^2$

Vastaus: Tilavuus on 6 250 cm³ ja pinta-ala noin 1 630 cm².

c) $V = \dfrac{h(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2}{3}$

$A_1 = (52{,}0\ \text{m})^2$

$A_1 = 2\,704\ \text{m}^2$

$A_2 = (19{,}0\text{m})^2$

$A_2 = 361\ \text{m}^2$

$$V = \frac{21{,}0\,\text{m}\,(2\,704\,\text{m}^2 + \sqrt{2\,704\,\text{m}^2 \cdot 361\text{m}^2} + 361\text{m}^2}{3}$$

$V = 28\,371\text{m}^3$

Sivutahko on tasakylkisen puolisuunnikkaan muotoinen. Yhden sivutahkon pinta-ala saadaan kertolaskulla

$26{,}7\ \text{m} \cdot (52{,}0\ \text{m} - 19{,}0\ \text{m})$

$= 26{,}7\ \text{m} \cdot 33\ \text{m}$

$= 881{,}1\ \text{m}^2$.

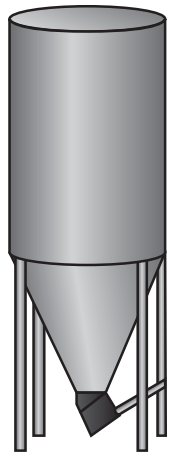
Kokonaispinta-ala on

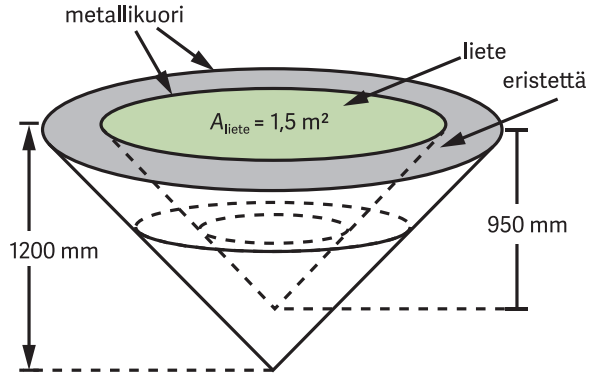
$4 \cdot 881{,}1\ \text{m}^2 + 2\,704\ \text{m}^2 + 361\ \text{m}^2 = 6\,589{,}4\ \text{m}^2$.

Vastaus: $V \approx 28\,400\ \text{m}^3$, $A \approx 6\,590\ \text{m}^2$.

Esimerkki 19

Metallipajalta tilattiin kuvan mukainen lietesiilo. Siilon ala-osassa on kartion muotoinen osa, jonka kärkeen tehdään jälki-asennuksena sopivan kokoinen reikä poistoputkelle. Kuinka monta litraa kartio-osaan mahtuu lietettä?





Ratkaisu:

Vettä on 950 mm = 0,95 m.

$$V = \frac{A_p h}{3}$$

$$V = \frac{1{,}5\ \text{m}^2 \cdot 0{,}95\ \text{m}}{3}$$

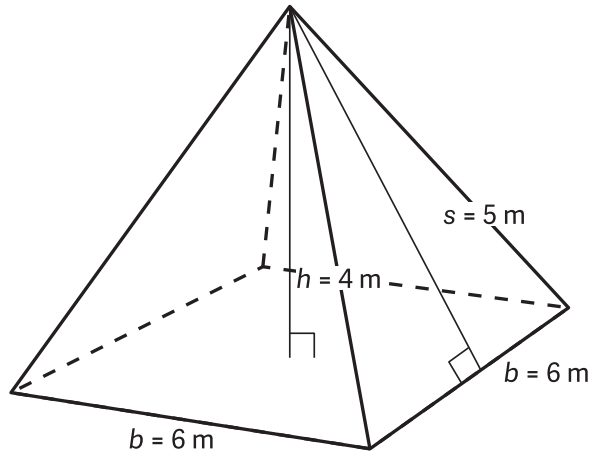
$V = 0{,}475\ \text{m}^3 = 475$ litraa

Vastaus: Lietettä mahtuu kartio-osaan 475 litraa.

Tehtäviä

1. Laske kuvan neliöpohjaisen pyramidin

a) pohjan pinta-ala *(Vihje: Pohja on neliö.)*

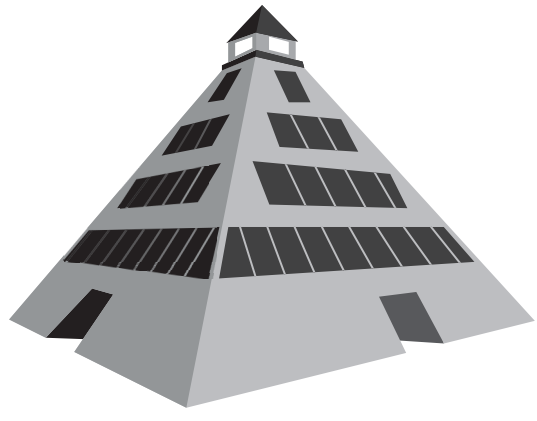


b) tilavuus

c) yhden kolmion muotoisen sivutahkon pinta-ala
(Vihje: Kannan pituus on 6 m ja korkeus 5 m.)

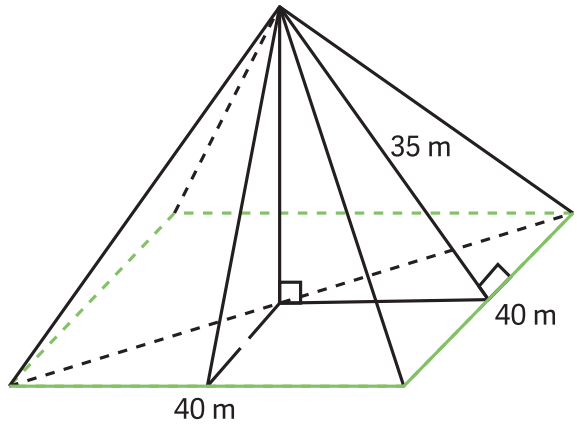
d) kokonaispinta-ala. *(Vihje: Neljän sivutahkon ja pohjan pinta-alan summa).*

2. Kuvassa olevan kartionmuotoisen rakennukse pohjan pinta-ala on 220 m^2. Rakennuksen korkeus 9,5 metriä. Laske, kuinka monta kuutiometriä rakennuksen tilavuus on.

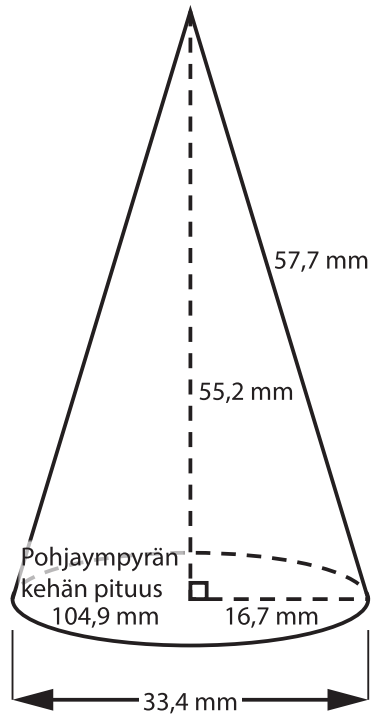


3. Mikä on kuvassa näkyvän kartion pinta-ala?

(Vihje: Pohja on neliön muotoinen, ja sivut ovat kolmion muotoisia.)



4. Työryhmän tavoitteena oli määrittää kuvan mukaisen suoran ympyräkartion tilavuus. Määritystä varten he mittasivat siitä ehkä jopa liiankin monta arvoa.

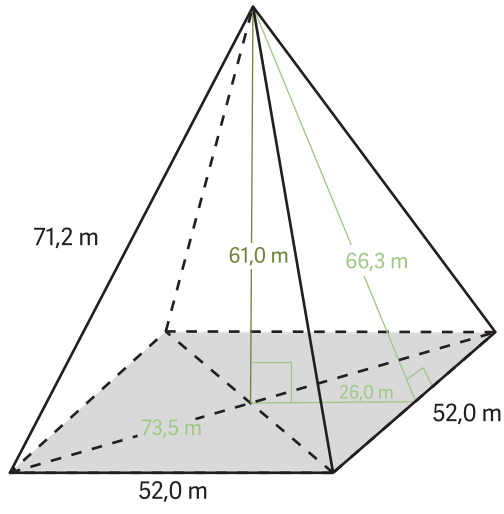


a) Laske kuvan kartion tilavuus kuutiomillimetreinä.

b) Muunna a-kohdassa saatu arvo millilitroiksi.

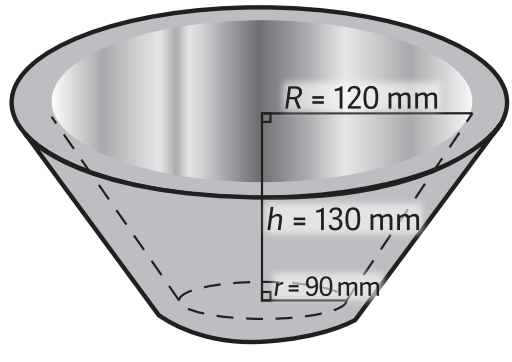
c) Laske kartion vaipan pinta-ala neliösenttimetreinä.

5. Kuvan neliöpohjaisen pyramidin sivutahkojen yhteenlaskettu pinta-ala on noin 6 900 m^2.
Laske pyramidin tilavuus.



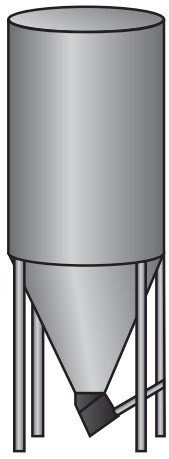
6. Neliöpohjaisen pyramidin tilavuus on 7 200 mm^3. Pyramidin korkeus on 12 millimetriä. Laske, kuinka pitkä on pyramidin pohjaneliön sivun pituus.

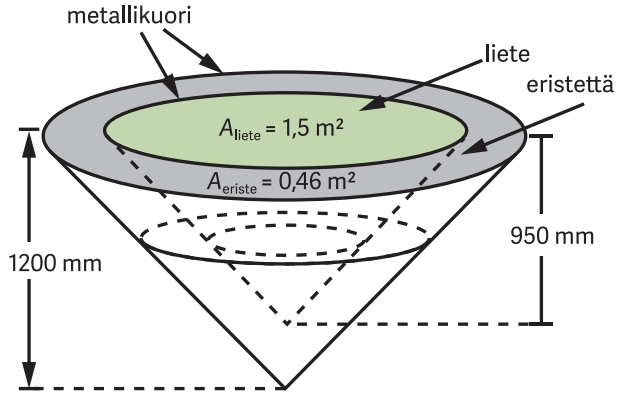
7. Kuinka monta litraa nestettä mahtuu kuvan kulhoon?



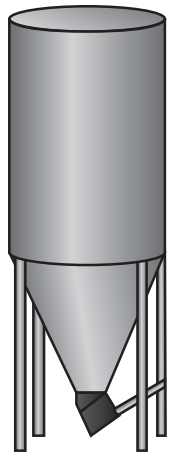
8. Kuinka monta litraa kuvan siilon kartionmuotoiseen osaan tarvitaan eristettä?

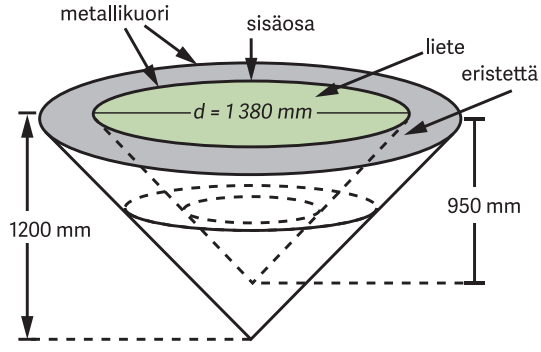
(Vihje: Laske ensin, kuinka suuri tilavuus kartiolla olisi, jos se olisi umpinainen eristekartio. Vähennä tästä lietteen tilavuus.)





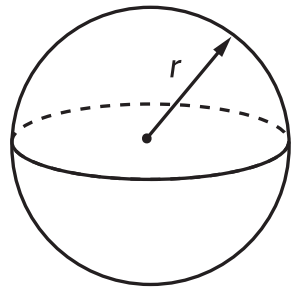
9. Kuinka paljon peltiä tarvitaan siilon kartio-osan sisäosan valmistamiseen? Anna vastaus neliömetreinä. *(Vihje: Laske ensin säde. Laske sen jälkeen Pythagoraan lauseella kartion sivujanan pituus.)*





Pallon tilavuus ja pinta-ala

Pallon tilavuus V ja pinta-ala A saadaan lasketuksi seuraavilla kaavoilla.



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$A = 4\pi r^2$$

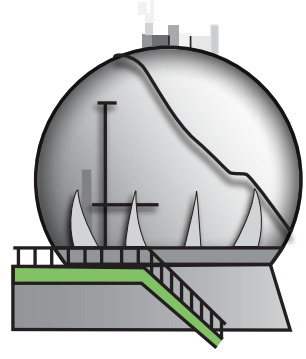
Vastaavasti puolipallon tilavuus ja pinta-ala saadaan puolittamalla kokonaisen pallon pinta-ala ja tilavuus.

Esimerkki 20

Paineistettua nestemäistä kaasua varastoidaan pallon muotoisessa astiassa. Laske

a) astian tilavuus litroina, kun sen sisähalkaisija on 38,0 metriä

b) astian ulkopinta-ala neliömetreinä, kun sen ulkohalkaisija on 38,4 metriä.



Ratkaisu:

a) Pallon tilavuus saadaan kaavalla $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot (19{,}0\,\text{m})^3$$

$$V \approx 28\,730{,}91\ \text{m}^3$$

$$V \approx 287\,300\,000\ \text{litraa}$$

b) Pallon pinta-ala saadaan kaavalla $A = 4\pi r^2$

$$A = 4\pi r \cdot (19{,}2\ \text{m})^2$$

$$A = 4\,632{,}47\ \text{m}^2$$

$$A \approx 4\,630\ \text{m}^2$$

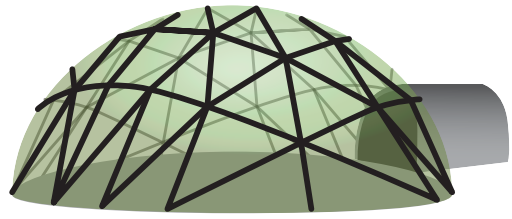
Vastaus:
Tilavuus on noin 28 700 000 litraa ja pinta-ala noin 4 630 m^2.

Tehtäviä

1. Etsi Avaruusgeometria-luvusta tärkeät kaavat alla olevaan huoneentauluun. Piirrä myös jokaiseen kohtaan kyseinen avaruuskappale ja merkitse siihen, mitä kaavassa olevilla kirjaimilla tarkoitetaan.

Lieriön tilavuus $V_{\text{lieriö}} =$	**Suorakulmaisen särmiön tilavuus** $V_{\text{suorakulmainen särmiö}} =$	**Ympyräpohjaisen lieriön tai kartion pohjan pinta-ala** $A_{\text{ympyrä}} =$
Kartion tilavuus $V_{\text{kartio}} =$	**Ympyräpohjaisen lieriön tilavuus** $V_{\text{ympyräpohjainen lieriö}} =$	**Ympyräpohjaisen (suoran) lieriön vaipan pinta-ala** $A_v =$
Pallon tilavuus $V_{\text{pallo}} =$	**Pallon pinta-ala** $A_{\text{pallo}} =$	**Ympyräpohjaisen (suoran) kartion vaipan pinta-ala** $A_v =$

2. Laske puolipallon muotoisen lasirakennuksen lasipinta-ala, kun rakennuksen pohjan halkaisija on 3,5 metriä.

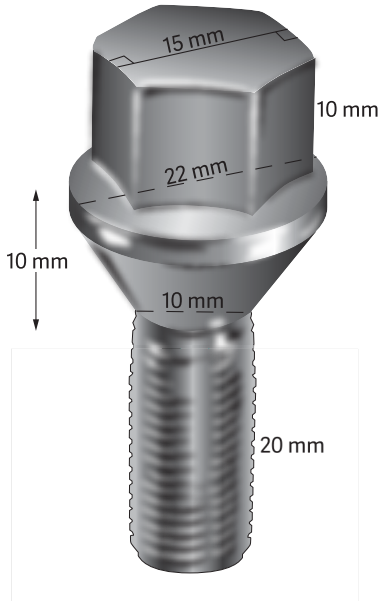


3. Olet ostamassa käytettyä kompressoria. Myyjä ei tiedä kompressorin tilavuutta, mutta kertoo viestissä sinulle kompressorin mitat:

”Kompressori koostuu sylinterinmuotoisesta kappaleesta, jonka päissä on puolipallon muotoinen kappale. Sylinteriosan pituus on noin 50 cm, ja poikkileikkauksen halkaisija on noin 30 cm.”

Vastaavia kompressoreita tuntevana uskot, että kompressorin tilavuus on 40, 50 tai 60 litraa. Laske, mikä näistä tilavuuksista on oikea. Voit olettaa, että teräskuori on niin ohut, ettei sitä tarvitse huomioida laskuissa.

4. Laske kuvan pultin tilavuus. Voit jättää kierteiden vaikutuksen tilavuuteen huomioimatta. (*Vihje: Usein kappale voidaan ”pilkkoa osiin”, joiden tilavuus ja pinta-ala on helpompi laskea.*)

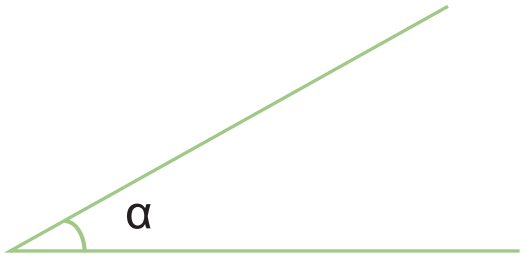


Kulmien suuruudet

Metallialalla olet jatkuvasti tekemisissä erisuuruisten kulmien kanssa. Palauta aluksi mieleesi kulmien luokittelu. Kulmat nimetään yleensä pienillä kreikkalaisilla kirjaimilla.

Terävä kulma

Kulma on terävä, kun sen suuruus on $0 < \alpha < 90°$.



Suora kulma

Kulma on suora, kun sen suuruus on tasan 90°.

Tylppä kulma

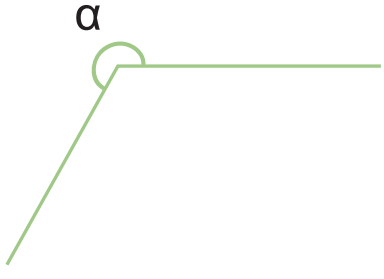
Kulma on tylppä, kun sen suuruus on $90° < \alpha < 180°$.

Oikokulma

Oikokulma on tasan 180°.

Kupera kulma

Kulma on kupera, kun sen suuruus on $180° < \alpha < 360°$.



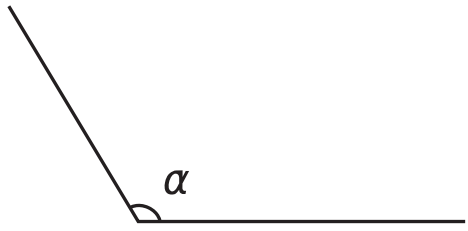
Täysi kulma

Täysi kulma on tasan 360°.

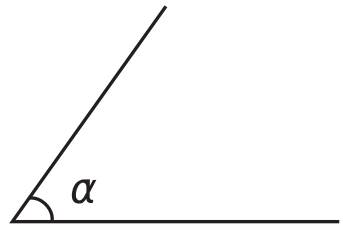
Tehtäviä

1. Arvioi ensin kulman suuruus. Tarkista sitten tulos astelevyllä mittaamalla.

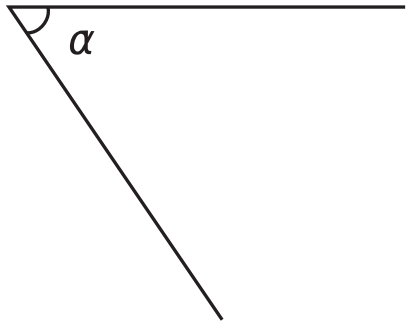
a)



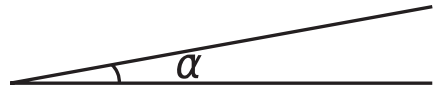
c)



b)



d)



2. Piirrä vihkoosi astelevyllä seuraavat kulmat.

a) 30° b) 110° c) 220° d) 65° e) 170° f) 340°

3. Piirrä viivoittimella luiska, jonka kaltevuus on 1:8. Mitat voit valita itse. Vertaa piirrosta kaverisi kanssa. Mittaa kaltevuuskulma.

4. Vastaa seuraaviin kysymyksiin:

a) Lumilautailija tekee "tonnikasikympin" eli pyörähtää 1 080 astetta. Montako pyörähdystä hän tekee?

b) CNC-koneistaja rentoutuu töiden jälkeen suunnistamalla. Aluksi hän etenee suoraan etelään, mutta yhtäkkiä hän päättää kääntyä kulkusuunnastaan 270 astetta vasemmalle. Mihin ilmansuuntaan hän on suuntaamassa?

c) Teet RHS-palkista suorakulmion työpöytää varten. Millä eri tavoilla voit tehdä kulmat? Pohdi.

5. Kellon viisarit piirtävät kulmia jatkuvasti. Mieti seuraavia kysymyksiä.

a) Kuinka monta astetta kellon minuuttiviisari etenee yhdessä tunnissa?

b) Tuntiviisari eteni 70 astetta. Kuinka monta minuuttia siihen kului?

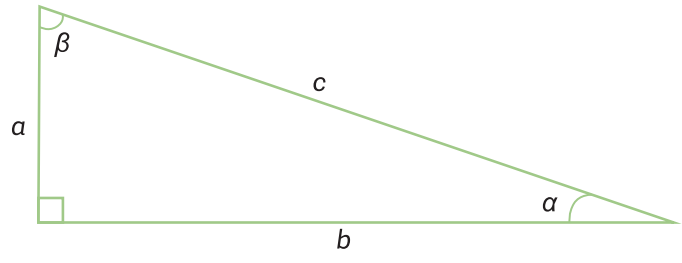
c) Minuuttiviisari eteni 450 astetta. Montako tuntia ja minuuttia tähän kului?

6. Harpilla ja viivaimella pystyy piirtämään säännöllisen kuusikulmion. Ota internetistä selvää, kuinka se tapahtuu ja piirrä vihkoosi säännöllinen kuusikulmio, jonka sivun pituus on 3 cm. Kuusikulmiorakennetta esiintyy silloin tällöin myös rakentamisessa. Missä olet törmännyt kuvioon?

Trigonometria

Trigonometria-sana muodostuu sanoista ”tri”, ”gono” ja ”metria”. Vapaasti suomennettuna nämä sanat merkitsevät kolmikulmamittausta. Trigonometristen funktioiden avulla voit ratkaista kolmioista niiden sivuja ja kulmia matemaattisesti. Rakennusalalla kulmien laskua voi tulla eteen vaikkapa luiskien valussa tai lapekulman määrittämisessä.

Tärkeän kolmen koplan muodostavat tangentti-, sini- ja kosinifunktiot, jotka määritellään suorakulmaisen kolmion avulla. Muistathan, mitä merkitsevät kateetti ja hypotenuusa? Voit täydentää ne alla olevaan kolmioon.



Tangentti

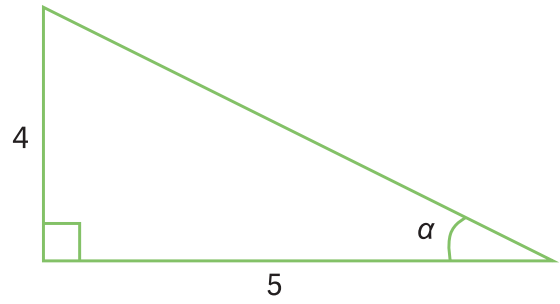
Suorakulmaisessa kolmiossa kulman α vastaisen ja vierekkäisen kateetin suhdetta sanotaan kulman tangentiksi:

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{vastakkainen kateetti}}{\text{viereinen kateetti}}$$

Kulmaa laskiessasi sinun täytyy ottaa laskimesta tangentin käänteisfunktio kateettien suhteesta. Tämä tehdään laskimittain inv-, 2ndf- tai shift-näppäimen kautta. Muista myös asettaa laskimestasi asteet (DEG) käyttöön!

Esimerkki 21

Määritä oheisesta kolmiosta kulma α.



Ratkaisu:

Muodostetaan yhtälö kulman α tangentille:

$$\tan\alpha = \frac{4}{5}.$$

Ratkaistaan kulma α laskimella ja pyöristetään vastaus:

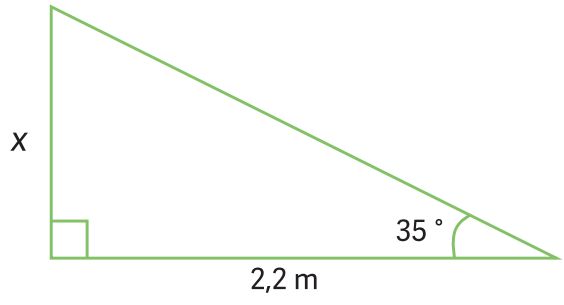
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = 38{,}659\ldots^\circ \approx 38{,}7^\circ$$

Asia ei siis ole erityisen vaikeaa, mutta usein vaikeuksia aiheuttaa laskimen tekninen käyttö. Kysy neuvoa opettajaltasi!

Jos kulma on tiedossa mutta sivun pituus ei, se voidaan helposti laskea yhtälönratkaisua soveltamalla. Yhtälönratkaisuista katso tarkemmin luvusta 5.

Esimerkki 22

Määritä kolmiosta kateetin pituus.



Ratkaisu:

Muodostetaan jälleen yhtälö:

$$\tan 35^\circ = \frac{x}{2{,}2\ \text{m}}.$$

Kerrotaan yhtälön molemmat puolet kertomalla 2,2 m:llä ja saadaan

$x = \tan 35^\circ \cdot 2{,}2\ \text{m} = 1{,}540\ldots\ \text{m} \approx 1{,}5\ \text{m}.$

Vastaus: Kateetin pituus on noin 1,5 metriä.

Huomaa, että nyt tangentista ei oteta käänteisfunktiota vaan 35 asteesta lasketaan tangenttifunktion arvo. Pitää olla jatkuvasti tietoinen siitä, onko laskemassa kulmaa vai tangenttifunktion arvoa jollain kulmalla.

Kosini ja sini

Kosini- ja sinifunktioiden käyttö on periaatteeltaan sama kuin tangentissakin – nyt vain vertaillaan eri sivujen suhteita. Pienet kirjaimet *a*, *b* ja *c* viittaavat sivun 148 mallikuvaan.

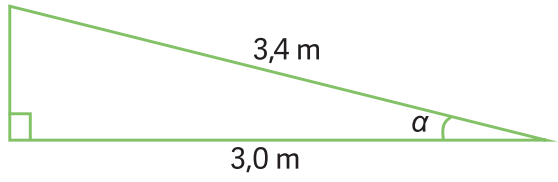
Määritellään funktiot sini ja kosini:

$$\cos\alpha = \frac{\text{viereinen kateetti}}{\text{hypotenuusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{vastakkainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}} = \frac{a}{c}$$

Esimerkki 23

Määritä oheisen luiskan kulma.



Ratkaisu:

Koska kolmiosta on tiedossa kulman viereinen kateetti ja hypotenuusa, on käytettävä kosinifunktiota:

$$\cos\alpha = \frac{3{,}0\text{ m}}{3{,}4\text{ m}},$$

josta laskimella näppäilemällä saadaan kulmaksi

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{3{,}4}\right) = 28{,}072\ldots^\circ \approx 28^\circ.$$

Vastaus: Luiskan kulma on siis noin 28 astetta.

Tehtäviä

1. Laske kulmien arvo asteen tarkkuudella.

a) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) =$ _____

b) $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{15}{23}\right) =$ _____

c) $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) =$ _____

d) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{16}{0{,}3}\right) =$ _____

e) $\alpha = \sin^{-1}(0{,}5) =$ _____

f) $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4{,}2}{5{,}3}\right) =$ _____

2. Laske trigonometrisen funktion arvo kymmenesosan tarkkuudella.

a) tan (30°) = _____

b) cos (30°) = _____

c) sin (30°) = _____

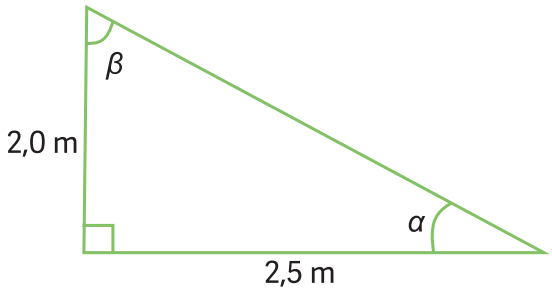
d) sin (89°) = _____

e) cos (13°) = _____

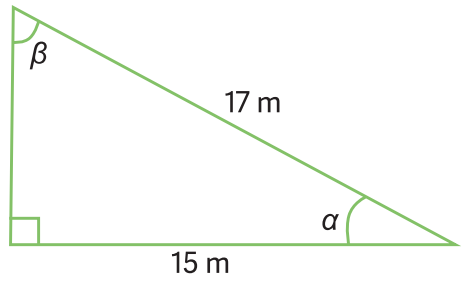
f) cos (179°) = _____

3. Määritä oheisista kolmioista kulmat alfa ja beeta asteen kymmesosan tarkkuudella.

a)



b)



_____ _____

_____ _____

_____ _____

_____ _____

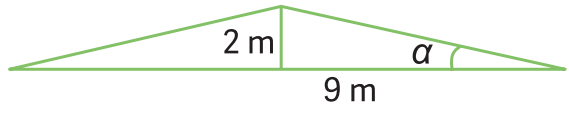
4. Määritä suorakulmaisen kolmion kulmat asteen tarkkuudella seuraavissa tapauksissa:

a) Kateettien pituudet ovat 20 cm ja 80 cm.

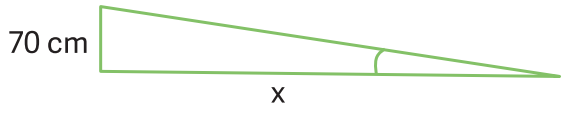
b) Toisen kateetin pituus on 58 cm, ja hypotenuusan pituus on 60 cm.

c) Toisen kateetin pituus on 4 cm ja hypotenuusan pituus on 50 cm.

5. Teräsprofiilista rakennettu kattotuoli on kuvan mukainen (tukiristikot on jätetty pois selvyyden takia). Kuinka jyrkäksi muodostuu lapekulma α?



6. Luiskan kaltevuus oli piirustuksessa 8 astetta. Jos luiskan korkeus on 70 cm, kuinka pitkäksi luiska muodostuu?



7. Tien kaltevuus ilmoitettiin suhdelukuna 1 : 14. Montako astetta kaltevuus tällöin oli?

8. Katkaiset 100 mm x 100 mm:n RHS-palkin 30 asteen kulmaan ja hitsaat sen toiseen palkkiin kiinni jokaiselta sivulta. Kuinka pitkä hitsaussaumasta tulee yhteensä?

9. Pisan kalteva torni on kallellaan 3,97 astetta. Tornin pystysuora korkeus matalammalta puolelta on 55,86 metriä. Kuinka kauas tornin juurelta putoaa huipulta pudotettu metallikuula?

10. Pihaa rakennettaessa on muistettava, että pihapinnan tulee kallistua noin 2 % rakennuksesta poispäin. Kuinka paljon tämä on asteina ilmaistuna?

11. Monien koneistustyökalujen kiinnityksissä käytetään morsekartiota. Ilmaise kartiokulmat kulmasekunnin tarkkuudella (1 aste = 60 kulmaminuuttia, 1 kulmaminuutti = 60 kulmasekuntia).

Morsekartio	Kartion suhde	Kartiokulma
MK 1	1 : 20,047	
MK 2	1 : 20,020	
MK 3	1 : 19,922	
MK 4	1 : 19,254	

12. Tehtävänäsi on sorvata asiakkaalle venepotkurin kiinnitystä varten 1 : 10 kartio halkaisijaltaan 30 mm:n akseliin. Kartio sorvataan 50 mm:n matkalle. Minkälaiseen kulmaan sorvin teräkelkka on asetetettava?

5

Yhtälöt

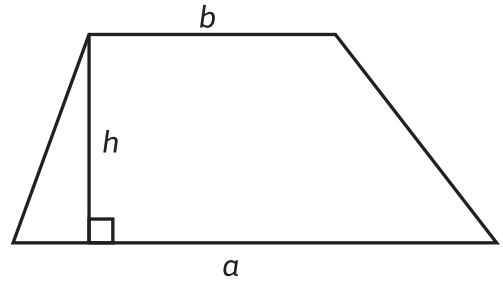
- Kaavaan sijoittaminen
- Tekijämuotoinen yhtälö ja verranto
- Suoraan ja kääntäen verrannollisuus
- Muut ensimmäisen asteen yhtälöt
- Toisen asteen yhtälö
- Kolmannen asteen yhtälö
- Funktiot ja kuvaajat

Kaavaan sijoittaminen

Kone- ja tuotantotekniikassa esiintyy paljon yhtälöitä: Pythagoraan lause sekä muut geometrian laskukaavat ovat vain pieni osa siitä valtavasta yhtälömäärästä, johon alan työntekijä tulee törmäämään. Yhteistä yhtälöille on se, että niissä on yhtäsuuruusmerkki, joka jakaa yhtälön kahteen yhtä suureen osaan.

Moniin tällä alalla esiintyviin matemaattisiin riippuvuuksiin on johdettu valmis kaava, joka on tietolähteistä löydettävissä. Esimerkiksi puolisuunnikkaan pinta-ala saadaan kaavalla

$$A = \frac{a + b}{2} \cdot h$$



Usein alan työntekijälle riittää, että hän osaa etsiä tai mitata olennaiset luvut ja sijoittaa ne kaavaan.

Esimerkki 1

Ratkaise A:n suuruus kaavasta $A = \frac{a + b}{2} \cdot h$, kun $a = 80$, $b = 50$ ja $h = 30$.

Ratkaisu:

Sijoitetaan kirjaimia vastaavat luvut yhtälöön:

$$A = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

$$A = \frac{80 + 50}{2} \cdot 30$$

$$A = 1\,950$$

Vastaus: $A = 1\,950$

Tekijämuotoinen yhtälö ja verranto

Tilan säästämiseksi yhtälöistä esitetään yleensä vain yksi muoto. Puolisuunnikkaan pinta-alan kaava on geometrian kaavakokoelmissa lähes aina sellaisessa muodossa, jossa A on ratkaistu eli se on"yksinään" toisella puolella yhtäsuuruusmerkkiä. Jos yhtälöstä halutaan ratkaista jokin muu muuttuja (suure), se pitää muuntaa erilaiseen muotoon.

Tekijämuotoisessa yhtälössä on ainoastaan kerto- ja jakolaskuja. Jos tekijämuotoisessa yhtälössä on jakolasku, yhtälö voidaan helposti täydentää verrannoksi. Huomattava osa metallialan yhtälöistä on tekijämuotoisia. Siksi niiden ratkaisuprosessiin kiinnitetään erityisen suurta huomiota.

Tekijämuotoisia yhtälöitä on periaatteessa kolmea eri tyyppiä:

Yhtälötyyppi 1	Yhtälötyyppi 2	Yhtälötyyppi 3a	Yhtälötyyppi 3b
$4x = 0{,}9$	$\frac{3}{4} = \frac{2x}{2{,}1}$	$1{,}5 = \frac{x}{3}$	$1{,}2 = \frac{2}{x}$

Yhtälötyypin 1 ratkaiseminen

Jos yhtälössä on ainoastaan kertolaskuja, se ratkaistaan seuraavalla tavalla:

1. Käännetään yhtälö niin päin, että muuttuja on yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella.

2. Jaetaan yhtälön vasen ja oikea puoli muuttujan kertojalla.

Esimerkki 2

Ratkaise seuraavista yhtälöistä U.

a) $4\,000 = U \cdot 12$

$U \cdot 12 = 4\,000 \quad || : 12$

$U = 333{,}3\ldots$

$U \approx 330$

b) $P = U \cdot I$

$U \cdot I = P \quad || : I$

$U = \frac{P}{I}$

Yhtälötyypin 2 eli verrannon ratkaiseminen

Jos yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolilla on jakolasku, yhtälötyyppiä kutsutaan verrannoksi. Verranto ratkaistaan kertomalla yhtälö ristiin. Asiaa selventää seuraavan sivun esimerkki.

Esimerkki 3

Ratkaise seuraavista yhtälöistä f.

a) $\dfrac{5{,}3}{4} = \dfrac{1{,}6}{f}$

$\dfrac{5{,}3}{4} \times \dfrac{1{,}6}{f}$

$5{,}3f = 4 \cdot 1{,}6$

$5{,}3f = 6{,}4 \quad || : 5{,}3$

$f = 1{,}2075$

$f \approx 1{,}21$

b) $\dfrac{7}{x} = \dfrac{f}{a}$

$\dfrac{7}{x} \times \dfrac{f}{a}$

$f = \dfrac{7 \cdot a}{x}$

Koska b-kohdan yhtälössä on pelkkiä kirjaimia, saadaan myös vastaukseksi pelkkiä kirjaimia sisältävä yhtälö.

Yhtälötyyppien 3a ja 3b ratkaiseminen

Jos yhtäsuuruusmerkin toisella puolella on jakolasku mutta toisella puolella ei, yhtälö saadaan palautetuksi tyypin 2 yhtälöksi, kun lisätään toiselle puolelle nimittäjäksi luku 1.

Esimerkki 4

Ratkaise seuraavista yhtälöistä R.

a) $3{,}5 = \dfrac{2}{R}$

$\dfrac{3{,}5}{1} = \dfrac{2}{R}$

$3{,}5R = 1 \cdot 2$

$3{,}5R = 2 \quad || : 3{,}5$

$R \approx 0{,}57$

b) $\dfrac{U}{R} = I$

$\dfrac{U}{R} = \dfrac{I}{1}$

$R \cdot I = U \quad || : I$

$R = \dfrac{U}{I}$

Tehtäviä

Huomaa, että tehtävissä 1–2 sinun tarvitsee vain sijoittaa luvut oikeaan paikkaan oikeaan yhtälöön.

1. Ratkaise ilman laskinta V kaavasta $V = \frac{m}{\rho}$. Kaavassa $\rho = 1\,000$ ja $m = 10$.

2. Momentti lasketaan kaavalla $M = F \cdot a$. Kaava saadaan myös muotoon $a = \frac{M}{F}$ ja $F = \frac{M}{a}$.

Kaavoissa M = momentti (newtonmetri, Nm)
F = voima (yksikkö newton, N)
a = voiman varsi (yksikkö: metri, m).

a) Ratkaise M, kun $F = 1\,000$ ja $a = 0{,}3$. (*Vihje: Käytä kolmesta tehtävänannon kaavasta sitä, jossa M on valmiiksi ratkaistu.*)

b) Ratkaise F, kun $a = 0{,}2$ ja $M = 30$.

3. Ratkaise x seuraavista yhtälöistä. Jos tuloksena on pitkä desimaaliluku, pyöristä se kahden desimaalin tarkkuuteen.

a) $35x = 280$

b) $3 \cdot 5 = 4 \cdot x$

c) $5 = 0{,}03x$

4. Ratkaise x seuraavista yhtälöistä. Jos tuloksena on pitkä desimaaliluku, pyöristä se kahden desimaalin tarkkuuteen.

a) $\frac{3}{x} = \frac{5}{2}$

b) $\frac{x}{4{,}5} = 3$

c) $0{,}06 = \frac{1{,}2}{2{,}2x}$

5. Ratkaise x seuraavista yhtälöistä.

a) $a \cdot x = r$

b) $\frac{x}{r} = s$

c) $\frac{1}{f} = \frac{1}{2x}$

6. Kartion tilavuus voidaan ratkaista kaavan $V = \frac{A_p h}{3}$ avulla.

a) Ratkaise h kaavasta

b) Kuinka suuri h on, kun $V = 3\,200\ \text{m}^3$ ja $A_p = 430\ \text{m}^2$?

7. Ratkaise kahden desimaalin tarkkuudella V kaavasta $V = \frac{h(A_1 A_2 + A_2)}{3}$.
Kaavassa $h = 6$, $A_1 = 5$ ja $A_2 = 3$.

8. Tiheys lasketaan kaavalla $\rho = \frac{m}{V}$, jossa ρ on tiheys (yksikkönä kg/m^3), m = massa (kg) ja V = tilavuus (m^3). Suorakulmaisen särmiön tilavuus voidaan laskea kaavalla $V = Ah$, jossa A on särmiön pohjan pinta-ala ja h on sen korkeus.

(Suorakulmaisen särmiön tilavuuden laskemisen voit kerrata luvusta 4.)

a) Millä kaavalla saadaan tietää suorakulmaisen särmiön massa, kun tiedetään sen pohjan pinta-ala, korkeus ja sen tiheys?

b) Lähes vaakasuoralla katolla on lunta. Lumen tiheys on noin 250 kg/m^3. Kuinka suuri massa on sellaisella lumimäärällä, jonka pinta-ala on 1 m^2 ja korkeus 46 cm?

9. Lämpötilan muuttuessa kappaleen pituus muuttuu. Pituuden muutos saadaan selville yhtälön $\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L_0$ avulla.

Kaavassa esiintyvien kirjainten merkitykset ovat seuraavat: α on pituuden lämpölaajenemiskerroin, ΔL on pituuden muutos, ΔT on lämpötilan muutos ja L_0 on alkuperäinen pituus.

a) Kuinka paljon 1 km:n pituinen rautatiekisko pitenee, jos lämpötila kasvaa 75 °C. Raudalle $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ (yksikkö 1/°C).

b) Kuinka paljon lämpötilan olisi noustava, jotta 1 200,0 mm:n pituinen pala alumiinia kasvaisi 2,0 mm? Alumiinille $\alpha = 23 \cdot 110^{-6}$ (yksikkö 1/°C).

10. CNC-jyrsimen lastuamisnopeus saadaan kaavasta $v = 3{,}14 \cdot D \cdot \frac{n}{1\,000}$,

joka voidaan muuntaa muotoihin $D = \frac{1\,000 \cdot v}{3{,}14 \cdot n}$ sekä $n = \frac{1\,000 \cdot v}{3{,}14 \cdot D}$.

Kaavoissa

D = terän halkaisija [mm]

v = lastuamisnopeus [m/min]

n = kierrosluku [r/min].

a) Mikä valitaan kierrosluvuksi, kun lastuamisnopeudeksi halutaan 25 m/min ja käytössä on halkaisijaltaan 40 mm:n terä?

b) Lastuamisnopeudeksi halutaan 15 m/min. Keksi kolme eri terän halkaisija-kierrosluku-lukuparia, joilla lastuamisnopeus voidaan saada aikaan. Kirjoita vastauksesi taulukkoon.

D (mm)	n (r/min)

c) Täydennä alla olevaan taulukkoon lukuja, siten, että CNC-jyrsimeen liittyvät kaavat toteutuvat.

v (m/min)	D (mm)	n (r/min)

Suoraan ja kääntäen verrannollisuus

Verranto on yhtälö, jossa kaksi suhdetta ovat yhtä suuret. Verranto voidaan ratkaista ristiin kertomalla.

Verrantoa voidaan käyttää joidenkin käytännön ongelmien ratkaisemisessa, kun kaksi suuretta muuttuvat toisiinsa nähden samassa suhteessa. Tällaiset ongelmat voidaan jakaa suoraan ja kääntäen verrannollisiin.

Suoraan verrannollisuus

Kun kaksi suuretta kasvavat tai pienenevät samassa suhteessa, kyseessä on suoraan verrannollisuus. Tällöin toisen suureen kaksinkertaistuessa myös toinen kaksinkertaistuu.

Esimerkki 5

3 000 millimetriä erästä pyörötankoa painaa 11,55 kg. Kuinka paljon painaa 10 000 millimetriä samaa pyörötankoa?

Ratkaisu:

Kyseessä on suoraan verrannollisuus, koska pyörötangon pituuden kasvaessa kasvaa myös sen paino. Verrannon muodostusta helpottamaan voidaan tehdä taulukko:

mm	kg
3 000	11,55
10 000	x

Ratkaistaan verranto: $\frac{3\,000}{10\,000} = \frac{11{,}55}{x}$

$3\,000x = 10\,000 \cdot 11{,}55$

$3\,000x = 115\,500$

$x = 115\,500 : 3\,000$

$x = 38{,}5$ kg

Vastaus: 10 000 millimetriä tankoa painaa 38,5 kg.

Kääntäen verrannollisuus

Kun toisen suureen kasvaessa toinen pienenee samassa suhteessa, kyseessä on kääntäen verrannollisuus. Tällöin toisen suureen kaksinkertaistuessa toinen puolittuu.

Esimerkki 6

Tehtaassa kootaan yksi kone 6 tunnissa, kun työntekijöitä on 5.

Kuinka kauan koneen kokoonpanoon menee, jos työntekijöitä on yksi vähemmän?

Oletetaan, että kaikkien työntekijöiden työteho on sama.

Ratkaisu:

Kyseessä on kääntäen verrannollisuus, koska työntekijöiden määrän vähetessä kokoonpanoon kuluva aika kasvaa.

Työntekijöiden lkm	Aika (h)
5	6
4	x

Koska kyseessä on kääntäen verrannollisuus, on toinen yllä olevista suhteista käännettävä ylösalaisin:

$$\frac{5}{4} = \frac{x}{6}$$

$4x = 5 \cdot 6$

$4x = 30$

$x = 30 : 4$

$x = 7{,}5 \text{ h}$

Vastaus: Koneen kokoamiseen kuluu aikaa 7,5 tuntia.

Tehtäviä

1. Ratkaise x.

a) $\frac{12}{x} = \frac{3}{4}$

b) $\frac{x}{15} = \frac{3}{45}$

c) $\frac{122}{4} = \frac{x}{68}$

d) $\frac{5}{7} = \frac{20}{x}$

2. Ovatko seuraavat suureet suoraan vai kääntäen verrannollisia?

a) metallilevyn paksuus ja massa (pinta-ala on vakio)

b) mutterien yhteispaino ja lukumäärä

c) kappaleen tilavuus ja paino (tiheys on vakio)

d) nopeus ja aika (matka on vakio)

e) hihnaa pyörittävän hammaspyörän pyörimisnopeus ja hihnan kulkema matka (hammaspyörän halkaisija on vakio)

f) säiliön täyttämiseen tarvittava aika ja pumpusta virtaavan veden määrä (l/min)

g) pyörän kehänopeus ja pyörän halkaisija (pyörimisnopeus on vakio)

- suoraan verrannollinen
- kääntäen verrannollinen

3. Hitsauspuikkoja on pakkauksessa 103 kpl ja ne painavat yhteensä 755 g. Kuinka monta hitsauspuikkoa on pakkauksessa, jonka paino on 1 000 g?

4. Heikki osti 8 000 millimetriä teräsputkea 45,40 eurolla. Kuinka monta millimetriä teräsputkea Heikki saa 100 eurolla?

5. Hitsausrobotti hitsasi 1 200 mm:n sauman 12 sekunnissa. Kuinka pitkän sauman robotti tekee minuutissa, jos sen nopeus pysyy samana?

6. Pertti sorvaa 20 akselia 3 tunnissa. Kuinka monta akselia Pertti sorvaisi 10 tunnin aikana, jos hänen tuottavuutensa pysyisi koko ajan samana?

7. Täydestä kaasupullosta (paine 180 bar) riittää hitsauskaasua 30 tunniksi. Kuinka kauaksi aikaa riittää kaasua, kun paine on laskenut 100 baariin. Kaasupullon paine ja hitsausaika ovat suoraan verrannollisia.

8. Puukuorman halkomiseen kuluu 2 ihmiseltä 12 h. Kuinka kauan kyseisen kuorman halkominen kestää, jos mukana on 3 ihmistä?

9. Pyörän halkaisija on 40 cm ja se pyörii 60 kierrosta minuutissa. Saman hihnan varassa pyörii toinen pyörä, jonka halkaisija on 15 cm. Kuinka monta kierrosta tämä pyörä tekee minuutissa?

10. Yritykseltä kuluu seitsemän 8-tuntista työpäivää 30 koneen kokoamiseen.

a) Kuinka monta tuntia kuluu 12 koneen kokoamiseen?

b) Kuinka monta konetta saadaan koottua 10 työpäivän aikana?t

11. Teräsbetonipalkin pituus muuttuu lämpötilan muuttuessa. Jos lämpötila muuttuu 100 astetta, viiden metrin pituisen teräsbetonipalkin pituus muuttuu 0,6 mm. Kuinka monta millimetriä kyseisen teräsbetonipalkin pituuden muutos voi olla suomalaisissa lämpötilaolosuhteissa (–40 °C ... +40 °C)? (*Vihje: Lämpötilan kasvaessa palkin pituus kasvaa samassa suhteessa.*)

12. Automatkaan Oulusta Helsinkiin kuluu 8 tuntia, kun autoilija ajaa 90 km/h:n keskinopeudella. Kuinka kauan häneltä kuluu matkaan aikaa, jos keskinopeus onkin 85 km/h?

13. Opiskelijoiden kevätretkelle on ilmoittautunut 42 opiskelijaa. Bussimatkan hinta olisi tällöin ollut 8,50 €/hlö. Lopulta opiskelijoista vain 36 lähtee retkelle. Mikä tulee tällöin yhden opiskelijan hinnaksi? Yhteishinta pysyi alkuperäisenä.

14. 40 pinokuutiometriä vastaa 24 kiintokuutiometriä. Kuinka monta kiintokuutiometriä on 15 pinokuutiometriä?

15. Kaksi samankokoista pyörää pyörittää hihnaa nopeudella 2 m/s. Pyörien halkaisijat ovat 24 cm. Pyörät korvataan pienemmillä pyörillä, joiden halkaisijat ovat 15 cm. Mikä on tällöin hihnan nopeus, jos pyörien pyörimisnopeus pysyy samana?

16. Vesisäiliö täyttyy 45 minuutissa, kun pumpusta tulee vettä 165 l/min. Jos pumpusta tulisi vettä 200 l/min, kuinka kauan säiliön täyttäminen kestäisi?

17. Työmatkaan kuluu autolla 20 min, kun keskinopeus on 40 km/h. Kuinka monta minuuttia aiemmin on lähdettävä töihin, jos työmatkan ajaa polkupyörällä keskinopeudella 17 km/h.

18. Tanko on tarkoitus katkaista suhteessa 2:3. Kuinka pitkä on tangon pidempi osa, kun lyhyempi on 55 mm?

19. Kaivossa on vettä 1 250 litraa, kun se on täynnä. Tällöin vedenpinta on 0,5 m kaivon yläreunasta. Kuinka monta litraa kaivossa on vettä, jos vedenpinnan etäisyys kaivon yläreunasta on 1,2 metriä?

20. Kaisa maksaa palkkaa urakasta yhteensä 1 200 €. Miten palkkaraha tulisi jakaa Tiinan ja Laurin kesken, kun Tiina on tehnyt työtä 4,5 h ja Lauri 7 h?

Muut ensimmäisen asteen yhtälöt

Kaikki yhtälöt eivät ole tekijämuotoisia yhtälöitä. Esimerkiksi $3 + 2x = x + 9$ ei ole tekijämuotoinen eikä sitä saada ratkaistuksi pelkillä jako- tai kertolaskuilla.

Usein et edes huomaa ratkaisevasi ensimmäisen asteen yhtälöitä. Jos eteesi tulisi tilanne, jossa sinulla on 25 euroa rahaa, jolla pitää ostaa kaupasta kaksi kappaletta 2,50 euroa maksavia teippirullia ja lopuilla rahoilla 6 euroa maksavia kumihansikkaita, pystyt ratkaisemaan kaupasta saatavien kumihansikkaiden määrän myös ilman yhtälöitä.

Esimerkki 7

Päättele, mikä on yhtälön $4x + 1 = 11$ ratkaisu. Perustele ratkaisu sijoittamalla vastaus muuttujan paikalle. *Tämän vaiheen voi tehdä myös päässä.*

Ratkaisu:

Kokeillaan muuttujan x paikalle eri lukuja.

Jos $x = 0$, vasemmaksi puoleksi saadaan $4 \cdot 0 + 1 = 1$

Jos $x = 1$, vasemmaksi puoleksi saadaan $4 \cdot 1 + 1 = 5$

Jos $x = 2$, vasemmaksi puoleksi saadaan $4 \cdot 2 + 1 = 9$

Jos $x = 3$, vasemmaksi puoleksi saadaan $4 \cdot 3 + 1 = 13$

Jos $x = 2{,}5$, vasemmaksi puoleksi saadaan $4 \cdot 2{,}5 + 1 = 11$

Yhtälön ratkaisu on siis $x = 2{,}5$.

Ratkaisu on luvun 2 ja luvun 3 välissä, sillä tehtävänannon yhtälön oikea puoli on 11, joka on lukujen 9 ja 13 välissä.

Kokeilemalla pystyy ratkaisemaan nopeasti yksinkertaisia yhtälöitä. Jos yhtälö on monimutkaisempi tai sen vastaus on desimaaliluku, on nopeampaa ratkaista yhtälö tavanmukaisella tavalla. Ensimmäisen asteen – ei-tekijämuotoiset – yhtälöt ratkaistaan seuraavasti:

1. Siirretään muuttujat yhtäsuuruusmerkin samalle puolelle ja muut termit yhtäsuuruusmerkin toiselle puolelle.
2. Yhdistetään samanmuotoiset termit.
3. Jaetaan yhtälö puolittain muuttujan kertoimella.

Esimerkki 8

Ratkaise yhtälö $3 + 2x = -8x + 4$

vaihe 1 $12x + 3 = -8x + 5$

vaihe 2 $2x + 8x = 5 - 3$

$10x = 2 \quad \text{II} : 2$

vaihe 3 $x = 0{,}2$

Tehtäviä

1. Ratkaise yhtälöt joko päättelemällä (kokeilemalla) tai tavanmukaisella yhtälönratkaisuprosessilla.

Jos "arvaat" yhtälön ratkaisun, sinun on sijoittamalla perusteltava, että kyseessä todella on yhtälön ratkaisu.

a) $3x + 3 = 9$

b) $x - 3 = -x - 1$

c) $\frac{x}{2} + 1 = 0{,}5$

2. Ratkaise yhtälöt. Jos vastaus on pitkä desimaaliluku, pyöristä vastaus kolmen desimaalin tarkkuuteen.

a) $3y + 1 = 2$

b) $4e + 6 = -2e + 13$

c) $0{,}2x + 3 = 0$

3. Tohtori.fi-sivuston mukaan ihmisen huippusyke lasketaan kaavalla

$$\text{Huippusyke} = 205 - \frac{1}{2} \cdot \text{ikä}$$

Aerobisessa harjoittelussa sykkeen tulisi olla noin 75 % huippusykkeestä.

Laske

a) 20-vuotiaan ihmisen huippusyke

b) aerobisen harjoittelun syke.

4. Jos kolmion sivujen pituudet ovat a, b ja c, saadaan piiri p selville kaavan $p = a + b + c$ avulla.

Ratkaise b tästä yhtälöstä.

5. Tohtori.fi-sivuston mukaan ihmisen huippusyke lasketaan kaavalla

$$\text{Huippusyke} = 205 - \frac{1}{2} \cdot \text{ikä}$$

Aerobisessa harjoittelussa sykkeen tulisi olla noin 75 % huippusykkeestä.

Kuinka vanhan ihmisen

a) huippusyke on 179 b) aerobisen harjoittelun syke on 141?

Muista laittaa lasku tai päättelyketju näkyviin.

Toisen asteen yhtälö

Toisen asteen yhtälöksi kutsutaan sellaista yhtälöä, jossa muuttuja x on toisessa potenssissa (x^2). Toisen asteen yhtälöitä käytetään esimerkiksi ratkaistaessa Pythagoraan lauseeseen ja pinta-aloihin liittyviä ongelmia.

Esimerkki 9

a) Ratkaise yhtälö $x^2 - 16 = 9$.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} x^2 - 16 &= 9 \quad || + 16 \\ x^2 &= 9 + 16 \\ x^2 &= 25 \\ x &= \sqrt{25} = \pm 5 \end{aligned}$$

eli $x = 5$ tai $x = -5$.

b) Ratkaise yhtälö $2x^2 + 5 = 37$.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5 &= 37 \quad || - 5 \\ 2x^2 &= 37 - 5 \\ 2x^2 &= 32 \quad || : 2 \\ x^2 &= \frac{32}{2} \\ x &= 16 \\ x &= \sqrt{16} = \pm 4 \end{aligned}$$

eli $x = 4$ tai $x = -4$.

Tehtäviä

1. Ratkaise x ilman laskinta.

a) $x^2 = 25$

b) $x^2 = 36$

c) $x^2 = 49$

d) $x^2 = 100$

2. Ratkaise x ilman laskinta.

a) $x^2 + 1 = 17$

b) $x^2 - 5 = 4$

c) $x^2 + 10 = 91$

d) $3 + x^2 = 67$

3. Ratkaise x.

a) $5x^2 = 45$

b) $4x^2 + 3 = 28$

c) $3x^2 - 8 = 424$

d) $4x^2 = 2x^2 + 242$

4. Ratkaise yhtälön tuntematon.

a) $A = a^2$

$A = 125\ \text{m}^2$

$a = ?$

b) $A = \pi \cdot r^2$

$A = 2\ \text{m}^2$

$r = ?$

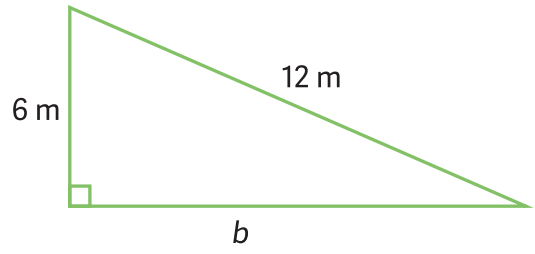
c) $A = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$A = 3{,}52\ \text{m}^2$

$h = 1{,}2\ \text{m}$

$r = ?$

5. Ratkaise Pythagoraan lauseen tuntematon.



$a^2 + b^2 = c^2$

$a = 6$ m

$c = 12$ m

$b = ?$

6. Ympyräpohjaisen lieriön muotoisen metallisäiliön tilavuus on 2,3 m^3. Lieriön korkeus on 1,5 m. Mikä on säiliön säde r?
(Vinkki: Lieriön tilavuus ratkaistaan kaavalla $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$)

7. Neliön muotoisen huoneen pinta-ala on 30 m^2. Mikä on huoneen sivun pituus?

8. Metalliputken poikkipinta-ala on 16 mm^2. Mikä on metalliputken halkaisijan pituus?

9. Koira tarvitsee jaloittelupinta-alaa vähintään 2 m^2 (alle 10 kg painavat koirat).

a) Jos häkin pohja on muodoltaan neliö, kuinka pitkiä sivujen täytyy olla?

b) Jos koira pidetään kytkettynä, kuinka pitkä narun on oltava? (Koiralla on tällöin ympyränmuotoinen jaloittelualue.)

10. Neliön muotoisen huoneen pinta-ala on 18 m^2. Mikä on huoneen sivun pituus piirustuksessa, jonka mittakaava on 1 : 50?

11. Metallista valmistetaan ympyräkartion muotoinen säiliö, jonka tilavuuden pitää olla 10 m^3. Säiliön korkeuden täytyy olla vähintään 12 000 m ja se saa olla enintään 16 000 m. Anna vastaukset seuraaviin kysymyksiin millimetreinä.

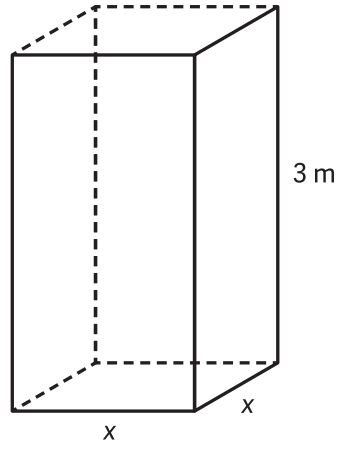
Mikä on

a) suurin mahdollinen halkaisija?

b) pienin mahdollinen halkaisija?

12. Nelikulmion kanta on kolminkertainen korkeuteen nähden. Nelikulmion pinta-ala on 25 m^2. Ratkaise kannan ja korkeuden suuruus. Anna vastaus millimetreinä.

13. Kuvan mukaisen teräsrakennelman tilavuuden pitäisi olla 10 m^3. Kuinka pitkiä pitäisi sivujen x tällöin olla?



Kolmannen asteen yhtälö

Kolmannen asteen yhtälössä muuttuja x on kolmannessa potenssissa (x^3). Kolmannen asteen yhtälöitä käytetään esimerkiksi ratkaistaessa kolmiulotteisiin kappaleisiin liittyviä ongelmia. Kolmannen asteen yhtälöt ratkaistaan samoin kuin toisen asteen yhtälöt, ainoastaan neliöjuuri $(\sqrt{\ })$ muuttuu kuutiojuureksi $(\sqrt[3]{\ })$.

Esimerkki 10

Ratkaise yhtälö $2x^3 + 5{,}75 = 37$.

Ratkaisu:

$2x^3 + 5{,}75 = 37 \quad \text{II} - 5{,}75$

$2x^3 = 37 - 5{,}75$

$2x^3 = 31{,}25 \qquad \text{II} : 2$

$x^3 = \dfrac{31{,}25}{2}$

$x = \sqrt[3]{15{,}625}$

$x = 2{,}5$

Tehtäviä

1. Ratkaise x ilman laskinta.

a) $x^3 = 27$ _____ b) $x^3 = 1000$ _____

c) $x^3 = 8$ _____ d) $x^3 = -8$ _____

2. Ratkaise x.

a) $x^3 + 9 = 73$ _____ b) $x^3 - 49 = 167$ _____

c) $3x^3 = 648$ _____ d) $2x^3 + 2{,}25 = 9$ _____

3. Ratkaise yhtälön tuntematon.

a) $V = a^3$

$V = 125\ \text{m}^3$

$a = ?$

b) $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

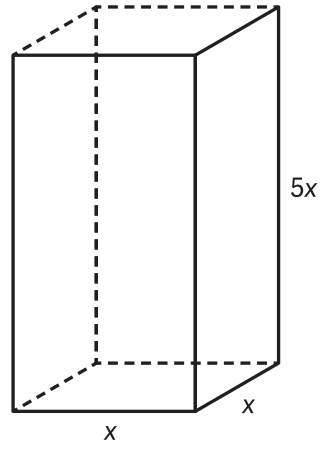
$V = 124\ \text{cm}^3$

$r = ?$

4. Kuution muotoisen säiliön tilavuuden pitäisi olla 2 m^3. Kuinka pitkä täytyy kuution sivun pituuden olla?

5. Puolipallon muotoisen hiekkakasan tilavuus on 5 m^3. Kuinka suuri ympyrän halkaisijan pitää olla?

6. Kuvan mukaisen rakennelman tilavuus on 100 m^3. Ratkaise x.



Funktiot ja kuvaajat

Funktiolla kuvataan matematiikassa kahden muuttujan välistä riippuvuutta. Muuttujien riippuvuutta voidaan kuvata kuvaajalla, joka piirretään koordinaatistoon. Funktion kuvaajan avulla yleensä joko nopeutetaan laskutoimitusta tai havainnollistetaan muuttujien riippuvuutta.

Kuvaajia tulkitessasi huomioi seuraavat seikat:

1. Lue tarkasti kuvaajan otsikko.
2. Lue tarkasti vaaka- ja pystyakselien otsikot ja yksiköt.
3. Tarkista, alkaako pystyakselin lukema luvusta 0.
4. Tarkista, onko akseleiden väli tasainen.

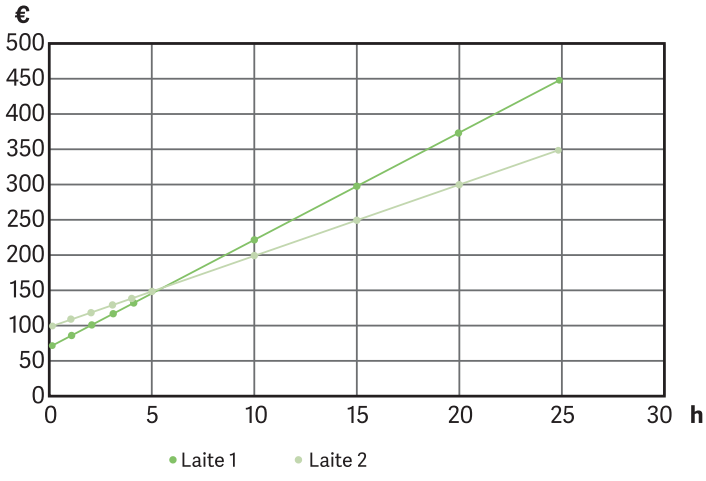
Esimerkki 11

Oheinen kuvaaja esittää kahden eri vuokraajan laitevuokrauksen hintoja. Tulkitse kuvaajasta, kuinka paljon maksaa

a) laitteen 1 vuokraus 10 tunniksi

b) laitteen 2 vuokraus 24 tunniksi.

c) Kumman laitteen vuokraaminen tulee halvemmaksi, jos laitetta käytetään 4 tuntia?



Ratkaisu:

a) Laitteen 1 vuokraus maksaa kuvaajan mukaan 225 €.

b) Laitteen 2 vuokraus maksaa kuvaajan mukaan noin 340 €.

c) Laite 1 tulee halvemmaksi.

Tehtäviä

1. Kuvaaja esittää erään sähkökiukaan käyttökustannuksia. Tulkitse kuvaajasta, kuinka paljon maksaa sähkökiukaan käyttö, kun se on käytössä

a) 2 tuntia _____ b) 5 tuntia _____

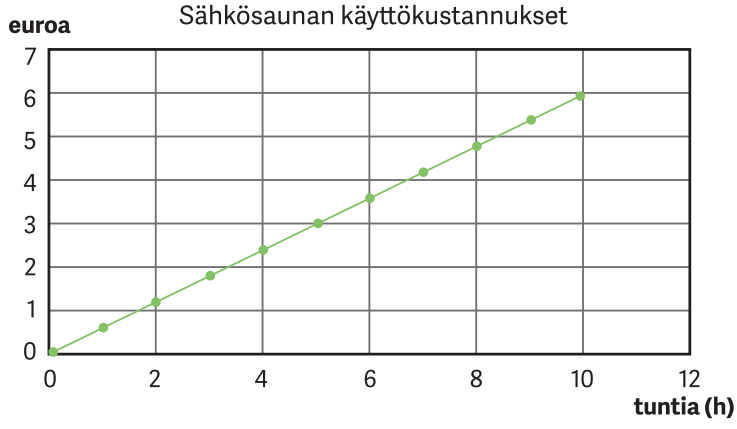
c) 10 tuntia. _____

d) Ennusta, kuinka paljon maksaisi käyttää kiuasta 11 tuntia.

_____

e) Kuinka kauan kiuasta voisi käyttää 1 €:lla?

_____



2. Myyjän kuukausipalkka määräytyy myytyjen tuotteiden lukumäärän mukaan seuraavan kuvaajan mukaisesti. Tulkitse kuvaajasta, kuinka paljon myyjä saa palkkaa, kun hän myy kuukaudessa

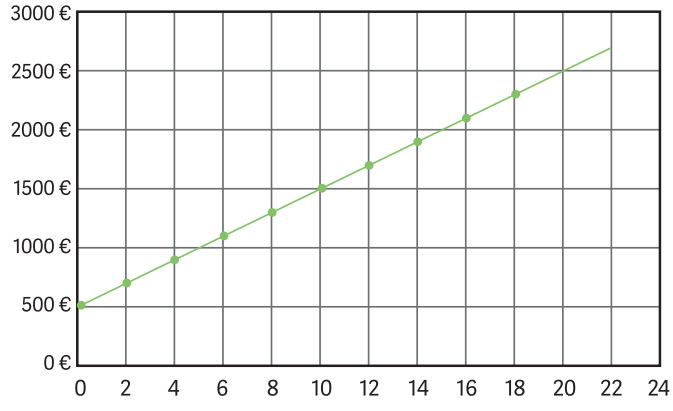
a) 2 tuotetta _____

b) 10 tuotetta _____

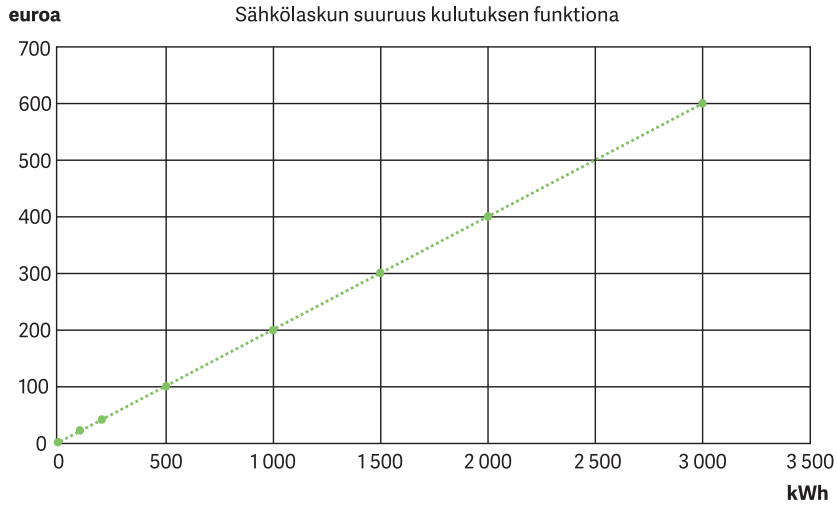
c) 16 tuotetta. _____

d) Kuinka monta tuotetta myyjän on myytävä, jotta hänen kuukausipalkkansa olisi 2 000 €?

_____



3. Säkkisen perheen sähkölasku koostuu perusmaksusta ja sähkönkulutuksesta seuraavan kuvaajan mukaisesti. Vastaa kysymyksiin kuvaajan perusteella.



a) Kuinka monta kilowattituntia energiaa Säkkiset voivat käyttää kuukaudessa, jos heidän tavoitteenaan on saada sähkölasku pysymään alle 200 €:ssa?

b) Kuukauden alussa Säkkisten sähkömittari näyttää lukemaa 29 390 kWh ja kuukauden lopussa 30 122 kWh. Kuinka paljon sähköstä laskutetaan (anna vastaus 50 €:n tarkkuudella)?

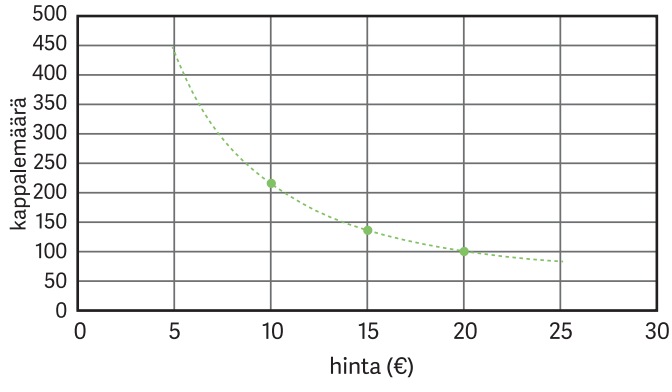
4. Erään tuotteen kysynnän ja hinnan välillä on havaittu olevan kuvaajan mukainen riippuvuus. Kuinka paljon tuotetta myydään, kun hinta on

a) 10 €

b) 15 €

c) 20 €?

d) Kumpi hinta antaa suuremman tuoton: 10 € vai 5 €?

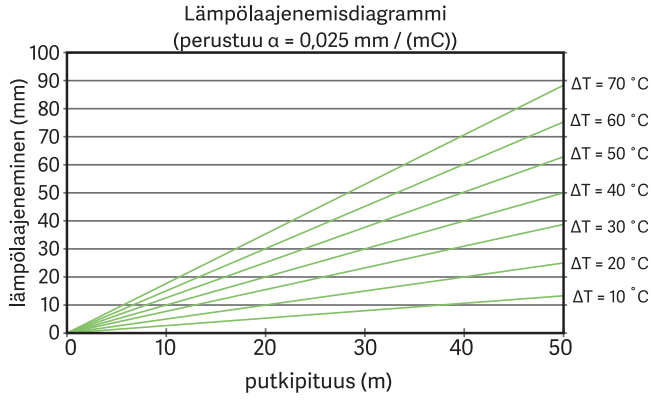


5. Pituuden lämpölaajeneminen voidaan laskea kaavan $\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L_0$ avulla.

Kaavassa α on pituuden lämpölaajenemiskerroin, ΔL on pituuden muutos, ΔT on lämpötilan muutos ja L_0 on alkuperäinen pituus. Kaavaan sijoitetaan oikeiden kirjaimien paikalle oikeat mitat ja kertoimet.

Jos materiaali on aina sama ja vastaukseen riittää likimääräinen tarkkuus, on nopeampaa katsoa kuvaajasta lämpölaajenemisen suuruus. Eräälle putkimateriaalille laadittiin pituuden lämpölaajenemisesta oheinen kuvaaja.

a) Kuinka paljon 20 metriä pitkä putki pitenee, jos lämpötila nousee 60 °C?



b) Kuinka paljon lämpötilan olisi noustava, jotta 30 m pitkä putki pitenisi noin 45 mm?

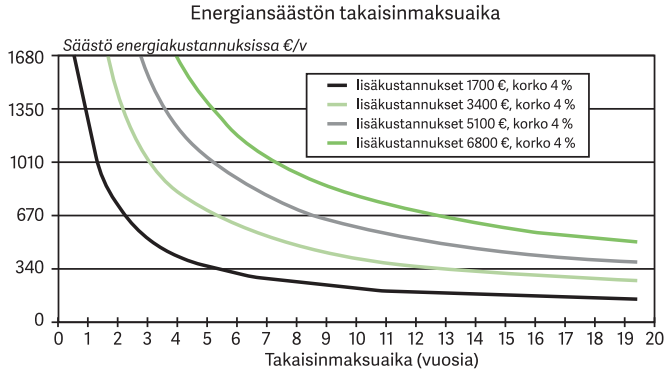
c) Kuinka paljon 200 m pitkän putken pituus vaihtelee vuoden aikana, jos lämpötila on talvella –40 °C ja kesällä +30 °C?

6. Tarkastele alla olevaa kuvaa.

a) Yritys ostaa 6 800 € maksavan aurinkopaneelilaitteiston. Yritys arvelee, että laitteiston ansiosta sähkölasku on vuodessa noin 500 euroa pienempi. Kuinka monta vuotta on investoinnin takaisinmaksuaika?

b) Kotitalouteen hankitaan suoran sähkölämmityksen rinnalle 1 700 € maksava ilmalämpöpumppu. Kuinka monta euroa säästöä vuodessa pitäisi vähintään kertyä, jotta takaisinmaksuaika olisi alle 5 vuotta?

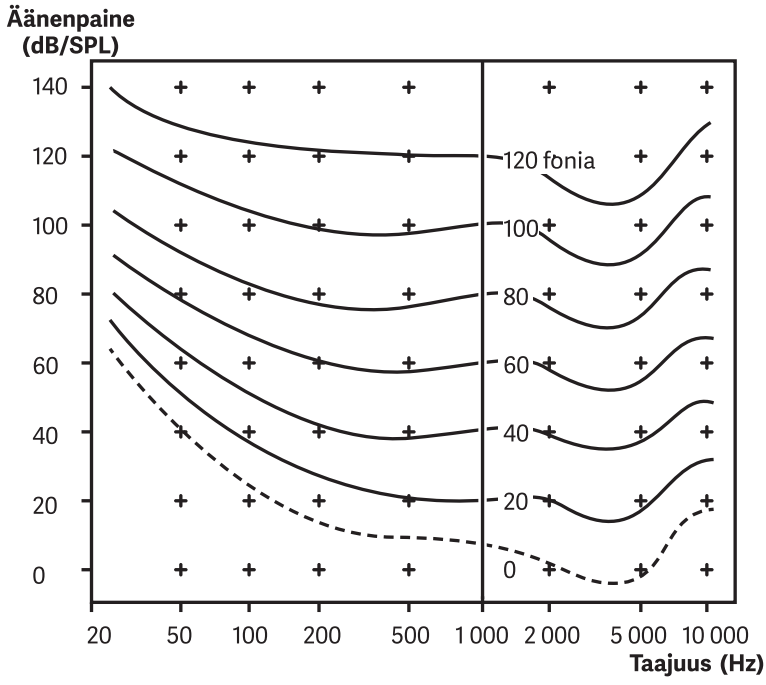
c) Eräs investointi maksaa 4 250 €. Investoinnin pitäisi maksaa itsensä takaisin noin 7 vuodessa. Kuinka monta euroa säästöä pitäisi vuodessa kertyä?



7. Foni on yksikkö, joka kuvaa sitä, kuinka voimakkaalta ääni tuntuu. Äänen voimakkuuden tuntemus riippuu sekä äänenpaineesta (desibeleistä) että taajuudesta (äänen korkeudesta).

Vieressä olevasta kuvaajasta voidaan lukea muun muassa, että 100 dB:n ja 1 000 Hz:n ääniyhdistelmä tuntuu yhtä voimakkaalta kuin 90 dB ja 3 500 Hz.

Katkoviivalla oleva 0 fonin käyrä kuvaa kuulokynnystä, jonka alapuolelle jäävää ääntä ihminen ei enää kuule.



a) Täydennä alla oleva taulukko.

Äänenpaine (dB)	Taajuus (Hz)	Äänen tuntemus (foni)
100	1 000	100
90	3 500	100
80		60
50	10 000	
	25	40

b) Eräs työkone tuottaa 3 500 Hz:n taajuuden ja 90 dB:n äänenpaineen. Hieman konetta säätämällä äänenpaine pysyy samana, mutta sen taajuuden saa muutettua. Mitä kuuloaistimukselle tapahtuu, jos taajuutta muutetaan kaksinkertaiseksi?

c) Jos vaihtoehtona olisi taajuuden pitäminen samana ja äänenpaineen muuttaminen, kuinka paljon äänenpainetta pitäisi muuttaa, jotta päästäisiin samaan äänen tuntemukseen kuin b-kohdassa?

d) Taulukon vaaka-asteikko on logaritminen. Mitä vaaka-asteikon lukemille tapahtuu, kun siirrytään oikealle tasavälein. *(Vihje: mittaa 50 Hz:n ja 100 Hz:n välin pituus ja vertaa sitä 100 Hz:n ja 200 Hz:n välin pituuteen.)*

e) Miksi taulukon vaaka-akseli on logaritminen?

6

Talousmatematiikka

- Palkkatulojen verotus
- Arvonlisävero
- Korot ja lainat
- Indeksilaskenta

Palkkatulojen verotus

Palkansaaja joutuu maksamaan ansioistaan veroa. Olet ehkä jo toimittanutkin verokortin kesätöitä varten työnantajallesi. Verokortista selviävät ennakonpidätysprosentti ja tulorajat. Kyseiset arvot ovat kuitenkin vain arvioita – jos tulosi vuoden mittaan olennaisesti muuttuvat suunnitellusta, kannattaa verokorttikin laskettaa uudestaan vero.fi.-palvelussa.

Vaikka verotus onkin varsin automatisoitua, tavallisen palkansaajan on osattava laskea ennakonpidätyksen määrä ja ymmärrettävä verotuksen perusteet. Harjoitellaan ensin laskemaan ennakonpidätyksen määrää eri tilanteissa.

Esimerkki 1

Erkki Viilan verokortti näyttää seuraavanlaiselta. Lasketaan ennakonpidätyksen määrä kuukauden osalta seuraavissa tilanteissa.

VERO SKATT

VEROKORTTI PÄÄTOIMEN PALKKATULOA VARTEN 2017
SKATTEKORT FÖR LÖN AV HUVUDSYSSLA 2017

Verotuskunta Beskattningskommun
092 VANTAA

Henkilötunnus Personbeteckning
123456-1234

Viila Erkki

Ennakonpidätysprosentit 1.2.2017 alkaen Förskottsinnehållningssatserna fr.o.m. 1.2.2017

Palkkaa varten För lön		Merityötuloa varten För sjöarbetsinkomst	
Perusprosentti Grundprocent	Lisäprosentti Tilläggsprocent	Perusprosentti Grundprocent	Lisäprosentti Tilläggsprocent
14,0	34,0		

Työnantaja toimittaa ennakonpidätyksen vaihtoehdon A mukaisesti, jos työntekijä ei ole vaatinut yhden tulorajan käyttämistä (vaihtoehto B). Perusprosentti ja lisäprosentti ovat samat riippumatta siitä, kumpaa vaihtoehtoa käytetään.

Arbetsgivaren verkställer förskottsinnehållningen enligt alternativ A, förutsatt att arbetstagaren inte begärt att en enda inkomstgräns ska tillämpas (alternativ B). Grundprocenten och tilläggsprocenten är desamma oberoende av vilket alternativ du väljer.

A Työnantaja toimittaa ennakonpidätyksen palkkakauden tulorajan mukaan. Arbetsgivaren verkställer förskottsinnehållningen enligt löneperiodens inkomstgräns.

Palkkakauden tuloraja Löneperiodens inkomstgräns					
kuukaudessa per månad	kahdessa viikossa per två veckor	viikossa per vecka	päivässä per dag	Merityötulo päivässä Sjöarbetsinkomst per dag	Laskennallinen tuloraja ATK-järjestelmiä varten Kalkylerad inkomstgräns för datasystem
1 590,60	700,41	380,32	55,60		18 800,00

B ☐ Haluan, että työnantaja toimittaa ennakonpidätyksen yhden tulorajan mukaan. Valintaa ei voi vaihtaa kesken vuoden. Jag väljer förskottsinnehållningen enligt en enda inkomstgräns. Alternativet kan inte bytas mitt under året.

18 000,00	Tuloraja ajalle 1.2. - 31.12. Tarkista, että tuloraja kattaa myös lomarahan. Työnantaja käyttää tammikuussa edellisen vuoden verokorttia. Inkomstgränsen för tiden 1.2. - 31.12. Kontrollera att inkomstgränsen täcker också semesterpenningen. I januari använder arbetsgivaren skattekortet för det föregående året.

Työnantajan merkinnät maksetuista palkoista 1.2.2017 alkaen Arbetsgivarens anteckningar om de utbetalda lönerna fr.o.m. 1.2.2017

Ajalta För tiden	Työnantajan nimi Arbetsgivarens namn	Ennakonpidätyksen alaiset palkat Förskottsinnehållningspliktiga löner

019704/VEUUS091_15

a) Työntekijä on valinnut ennakonpidätystä varten vaihtoehdon A, ja hänen bruttopalkkansa on ollut kuukaudessa 1 500 euroa.

Koska bruttotulot eivät ylitä kuukauden tulorajaa, hänen ennakonpidätyksensä määrä lasketaan kuukausituloista suoraan perusprosentilla:

$0{,}14 \cdot 1\,500\ € = 210\ €$.

Vastaus: Ennakonpidätystä peritään 210 euroa.

b) Työntekijä on valinnut ennakonpidätystä varten vaihtoehdon A, ja hänen bruttopalkkansa on ollut 2 600 euroa kuukaudessa.

Nyt bruttotulot ylittävät kuukauden tulorajan. Tulorajaan asti ennakonpidätystä peritään perusprosentin ja tulorajan *ylittävästä* palkanosasta lisäprosentin mukaan:

$0{,}14 \cdot 1\,590{,}60\ € + 0{,}34 \cdot (2\,600\ € - 1\,590{,}60\ €) = 565{,}88\ €$.

Vastaus: Ennakonpidätystä peritään 565,88 euroa.

c) Työntekijä on valinnut ennakonpidätystä varten vaihtoehdon B, ja hänen bruttopalkkansa on ollut 2 600 euroa kuukaudessa, eikä hänellä ole aikaisempia tuloja verovuodelta.

Kun valitaan vaihtoehto B, koko vuoden ajaksi on vain yksi tuloraja, jonka täytyttyä kaikki loppuvuoden tulot verotetaan lisäprosentin mukaan. Nyt tulot jäävät selvästi alle tulorajan, joten ennakonpidätyksen määrä lasketaan perusprosentilla:

$0{,}14 \cdot 2\,600\ € = 364\ €$.

Vastaus: Ennakonpidätystä peritään 364 €.

Vertaile kohtia b ja c. Huomaat, että ennakonpidätyksen määrä on eri, vaikka bruttotulot ovat samat. Vuoden mittaan tilanne kuitenkin tasoittuisi, sillä vaihtoehdon B valinneella tuloraja täyttyy hyvissä ajoin ennen vuoden vaihdetta, jonka jälkeen kaikkia tuloja verotettaisiin lisäprosentin mukaan. On lopulta täysin sama, kumman vaihtoehdon valitsee. Verohallinto laskee toteutuneiden tulojen perusteella lopullisen veron määrän. Jos maksetun ennakonpidätyksen määrä ei riitä, palkansaaja joutuu maksamaan jäännösveroa.

Kuinka maksetut verot jakautuvat?

Ansiotuloverotus jakautuu käytännössä kahteen osaan: valtion tuloverotukseen ja kunnallisverotukseen. Lisäksi on muutamia muita pienempiä veronluonteisia maksuja, kuten Yle- ja kirkollisvero sekä sairausvakuutusmaksut. Ennakonpidätysprosenttisi on määritetty siten, että sen pitäisi kattaa kaikki nämä maksut.

Valtion tuloverotus määräytyy joka vuosi määriteltävän taulukon perusteella. Vuoden 2017 tuloverotaulukko näyttää seuraavalta:

Verotettava ansiotulo (euroa)	Vero alarajan kohdalla (euroa)	Vero alarajan ylittävästä tulon osasta (%)
16 900–25 300	8	6,25
25 300–41 200	533,00	17,5
41 200–73 100	3 315,50	21,5
73 100–	10 174,00	31,5

Tuloveron laskeminen ei siis juuri eroa aikaisemmista laskuista. Tulovero on progressiivista, eli sitä maksetaan suhteessa aina enemmän tulojen kasvaessa. Toisaalta pienituloiset välttyvät valtion tuloverolta kokonaan.

Kunnallisvero määräytyy asuinkunnan mukaan. Se ei ole progressiivinen vero, eli sitä kannetaan tuloluokasta riippumatta saman prosentin mukaan.

Sairausvakuutusmaksut sekä työeläke- ja työttömyysvakuutusmaksut peritään niin ikään saman prosentin mukaan kaikilta palkansaajilta. Sitä vastoin kirkollisveron joutuvat maksamaan vain kirkkoon kuuluvat kansalaiset.

Yle-vero koskettaa jokaista kansalaista, ja sitä peritään 0,68 % verotettavista tuloista. Veron maksimimäärä on kuitenkin 143 euroa, eikä veroa peritä lainkaan, jos sen määrä jää alle 70 euroon.

Pääomatuloa ovat esimerkiksi vuokratulot ja osakkeista saatavat osinkotulot. Pääomatuloista veroa maksetaan 30 000 euron tuloihin asti 30 % ja sen ylittävistä tuloista 34 %.

Esimerkki 2

Oululainen kirkkoon kuuluva koneistaja on ansainnut vuoden aikana 45 000,00 euroa palkkatuloa.

Oulun kunnallisveroprosentti on 20 %, kirkollisvero 1,3 % ja sairausvakuutuksen päivärahamaksu 1,58 %. Lisäksi työttömyysvakuutusmaksun suuruus on 1,6 % ja eläkevakuutusmaksun suuruus 6,15 %. Yle-vero on 0,68 %, kuitenkin enintään 143,00 euroa, eikä sitä tarvitse maksaa, jos palkansaajan ansiotulot jäävät vuodessa alle 11 044,00 euron.

a) Kuinka paljon koneistajan on maksettava valtion tuloveroa, kunnallisveroa ja muita veronluonteisia maksuja, jos ei oteta huomioon verotuksessa myönnettäviä vähennyksiä?

b) Mitkä ovat koneistajan lopulliset nettotulot, jos ei oteta huomioon verotuksessa myönnettäviä vähennyksiä?

Ratkaisu:

a) Lasketaan ensin valtion tulovero käyttämällä edellisellä sivulla olevaa taulukkoa. Esimerkin tuloilla päädytään toiseksi korkeimpaan tuloluokkaan, jolloin tuloveron määräksi saadaan

$3\,315{,}50\,€ + 0{,}215 \cdot (45\,000\,€ - 41\,200\,€) = 3\,315{,}50\,€ + 0{,}215 \cdot 3\,800{,}00\,€ =$

$3\,315{,}50\,€ + 817{,}00\,€ = 4\,132{,}50\,€.$

Lasketaan seuraavaksi kunnallisveroprosentti ja muut ei-progressiiviset maksut yhteen:

$20\,\% + 1{,}3\,\% + 1{,}58\,\% + 1{,}6\,\% + 6{,}15\,\% = 30{,}63\,\%.$

Veroa kannetaan siis

$0{,}3063 \cdot 45\,000\,€ = 13\,783{,}50\,€.$

Lisäksi maksettavaksi tulee Yle-vero:

$0{,}0068 \cdot 45\,000\,€ = 306\,€.$

Yle-veroa on siis maksettava 143 euroa.

Yhteensä verot ja veronluonteiset maksut ovat siten

$4\,132{,}50\,€ + 13\,783{,}50\,€ + 143{,}00\,€ = 18\,059{,}00\,€.$

b) Koneistajan nettotulot ilman verotuksessa tehtäviä vähennyksiä olisivat siis

$45\,000{,}00\,€ - 18\,059{,}00\,€ = 26\,941{,}00\,€.$

Tehtäviä

1. Selitä seuraavat termit:

Bruttopalkka = _____

Nettopalkka = _____

Ennakonpidätys = _____

2. Verokortissa on merkitty palkkakauden tulorajaksi 1 600 euroa/kk. Perusprosentti on 13 ja lisäprosentti 35. Kuinka paljon palkansaaja joutuu maksamaan ennakonpidätystä, jos tulot ovat kuukaudessa

a) 1 400 € _____

b) 2 000 € _____

c) 3 090 €? _____

3. Verokortissa palkkakauden tuloraja on 2 600 euroa/kk. Perusprosentti on 18 ja lisäprosentti 38. Kuinka paljon palkansaaja joutuu maksamaan ennakonpidätystä, jos hänen tulonsa ovat kuukaudessa

a) 2 100 € _____

b) 2 700 € _____

c) 4 000 €? _____

4. Verokortissa perusprosenttisi on 24 % ja lisäveroprosenttisi on 46 %. Tulorajasi on 46 300,00 €/v. Kuinka paljon maksat veroja yhteensä, jos ansaitset vuodessa

a) 43 200,00 € _____

b) 46 300,00 € _____

c) 50 000,00 € _____

d) 55 000,00 €? _____

5. Laske, kuinka paljon seuraavista vuosituloista pitää suorittaa valtion tuloveroa.

a) 11 000 €

b) 22 000 €

c) 30 000 €

d) 88 000 €

6. Vertaa edellisen tehtävän kohtia b ja d. Tulot ovat kasvaneet nelinkertaisiksi. Kuinka moninkertaiseksi tulovero kasvoi?

7. Olit töissä konepajalla ja ansaitsit vuodessa bruttona 34 000 euroa.

a) Laske tuloistasi maksettavan veron määrä, kun asut Rovaniemellä (veroprosentti 21 %). Tuloista on maksettava myös valtion tulovero, työttömyysvakuutusmaksu 1,6 %, sairausvakuutuksen päivärahamaksu 1,58 %, eläkevakuutusmaksu 6,15 %, Yle-vero sekä kirkollisvero 1,25 %.

b) Kuinka suuri on kokonaisveroprosenttisi?

c) Saitko veronpalautusta vai joudutko maksamaan jäännösveroa, kun olit maksanut vuodessa ennakonpidätystä 12 300 euroa?

8. Pelti- ja teollisuuseristysalan työehtosopimuksessa kuukausipalkka määritellään työn vaativuuden perusteella. Jos teet normaalisti täyttä eli 40 tunnin työviikkoa, työaika tasataan päivä- ja kaksivuorotyössä siten, että se on 36,5 tuntia viikossa (vuonna 2016).

Työn vaativuuteen perustuvat työkohtaiset tuntipalkat (senttiä/tunti) ovat 1.3.2015 alkaen seuraavat	
TVR 1	949
TVR 2	1 020
TVR 3	1 097
TVR 4	1 179
TVR 5	1 267

Työn tasaamisesta aiheutuva ansion väheneminen korvataan seuraavasti: säännöllisen työajan tunnilta maksetaan senttimääräinen lisä, joka on 6,3 % työntekijän vuosineljänneksittäin määräytyvästä keskituntiansiosta.

a) Kuinka paljon ansaitset viikossa bruttona, jos ei oteta huomioon työajan tasaamislisää? Palkkasi määräytyy TVR 1:n mukaisesti.

b) Kuinka paljon ansaitsee viikossa bruttona työntekijä, jonka palkka määräytyy TVR 4:n mukaisesti? Jätetään tässäkin huomioimatta työajan tasaamislisä.

9. Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

a) Edellisen vuosineljänneksen keskituntiansiosi on ollut 10,02 €/h. Kuinka paljon tällöin olisi viikon bruttopalkkasi, kun se määräytyy TVR 1:n mukaisesti?

Vuosilomapalkkaan ei lasketa kaikkia ansioita, minkä vuoksi vuosilomapalkan perusteena oleva keskituntiansio on pienempi kuin koko vuoden keskituntiansio.

b) Vuodessa on 52 viikkoa. Oletetaan, että olet ansainnut keskimäärin 10,92 €/h työssäoloviikoiltasi, joita on vuodessa 47 kpl. Kuinka paljon olisi bruttopalkkasi näiltä viikoilta?

c) Vuosilomapalkka ja lomakorvaus lasketaan keskituntiansion perusteella siten, että keskituntiansio kerrotaan lomapäivien määrästä riippuvalla kertoimella. Täyden vuosiloman päivien määrä on 30 ja kerroin 222,4. Lisäksi maksetaan lomaraha, joka on 50 % loma-ajan palkasta. Jos oletetaan, että keskituntiansiosi olisi 10,02 €/h, kuinka paljon olisi koko vuosiloma-ajan bruttopalkkasi lomakorvauksineen?

Arvonlisävero

Arvonlisävero (alv) on kulutusvero, joka verottaa tuotteen tai palvelun arvonlisää. Olet varmaan huomannutkin kassakuiteissa erittelyn verottomaan ja verolliseen hintaan. Kuluttajana maksat verottoman hinnan ja arvonlisäveron summan.

Yleisin alv-kanta on 24 %, mutta tiettyjä poikkeuksiakin on. Esimerkiksi elintarvikkeiden alv-kanta on 14 % ja kirjojen 10 %. Ajantasaisen alv-kantojen erittelyn löydät vero.fi-sivustolta.

Ammatinharjoittajan perustaitoihin kuuluu verollisen ja verottoman hinnan laskeminen.

Esimerkki 3

Nuorrutetun terästangon veroton hinta oli 15,00 €/m. Ilmoita tangon hinta verollisena.

Ratkaisu:

Koska arvonlisävero lasketaan aina verottomasta hinnasta, verollinen hinta lasketaan korottamalla yksinkertaisesti verotonta hintaa 24 prosenttia:

$$1{,}24 \cdot 15{,}00 \ \frac{€}{m} = 18{,}60 \ \frac{€}{m}$$

Vastaus: Verollinen hinta oli 18,60 €/m.

Esimerkki 4

Käytetyn metallisorvin hinta oli verollisena 6 000,00 euroa. Kuinka paljon oli veroton hinta?

Ratkaisu:

Veroton hinta saadaan jakamalla verollinen hinta 1,24:llä (koska verollinen hinta on 124 % verottomasta hinnasta):

$$\frac{6\,000{,}00 \ €}{1{,}24} = 4\,838{,}7096\ldots \ € \approx 4\,838{,}71 \ €$$

Vastaus: Kompressorin veroton hinta oli 4 838,71 euroa.

Paina tarkasti mieleesi seuraavan taulun sisältö:

Työsalin huoneentaulu

Kun alv-kanta on 24 %

- **saat verollisen hinnan, kun kerrot verottoman hinnan 1,24:lla**
- **saat verottoman hinnan, kun jaat verollisen hinnan 1,24:lla.**

Arvonlisäveron tilitys valtiolle

Arvolisäverovelvolliset yritykset saavat vähentää yritystoimintaa varten hankkimiensa tavaroiden ja palveluiden aiheuttamat arvonlisäverot omasta arvonlisäveronsa määrästä. Muuten vero tulisi maksetuksi kahteen kertaan. Käsitellään ensin juurta jaksain, miten arvonlisää verotetaan yritystoiminnassa ja kuinka alv-vähennys toimii käytännössä.

Esimerkki 5

Viljamin Koneistamo Oy osti terästä pientä perälevyä varten.

Teräs maksoi verollisena 372 €. Veroton hinta oli siten $\frac{372\ €}{1{,}24} = 300\ €$.

Arvonlisäveroa maksettiin siis teräskauppiaalle 72 euroa.

Kun perälevy oli valmis, se myytiin asiakkaalle 1 488 euron verolliseen hintaan. Tällöin veroton hinta oli $\frac{1488\ €}{1{,}24} = 1200\ €$. Arvonlisäveron määrä myyntihinnasta on siten 1 488 € – 1 200 € = 288 €.

Yritys lisäsi teräsmäärän arvoa siis yhteensä 1 200 € – 300 € = 900 €:lla (arvonlisä lasketaan verottomista hinnoista), ja juuri tästä kyseisestä summasta yrityksen on tilitettävä valtiolle 24 prosenttia arvonlisäveroa:

$0{,}24 \cdot 900\ € = 216\ €$.

Kirjanpidossa ei kuitenkaan lasketa näin monimutkaisesti tilitettävän arvonlisäveron määrää. Valtiolle tilitettävän veron määrä lasketaan vähentämällä ostojen arvonlisävero myynnin arvonlisäverosta. Seuraava esimerkki selventää asiaa. Esimerkissä on käytetty samoja lukuja kuin aiemmassa esimerkissä.

Esimerkki 6

Viljamin Koneistamo Oy myi perälevyä verolliseen hintaan 1 488 €. Yritys osti perälevyn valmistamista varten vähennyskelpoista materiaalia verolliseen 372 euron hintaan. Kuinka paljon tilitetään arvonlisäveroa valtiolle?

Ratkaisu:

Lasketaan ensin myynnin alv vähentämällä verollisesta hinnasta veroton hinta:

$$1488\ € - \frac{1488\ €}{1{,}24} = 288\ €.$$

Sitten määritetään ostojen alv samalla tavalla: $372\ € - \frac{372\ €}{1{,}24} = 72\ €.$

Valtiolle tilitettävä alv = Myynnin alv – Ostojen alv:

288 € – 72 € = 216 €.

Vastaus: Arvonlisäveroa on tilitettävä valtiolle 216 euroa.

Huomaa, että vastaus on juuri sama kuin arvonnoususta laskettu arvonlisävero!

Tehtäviä

1. Käyt ostamassa metallitavaraa projekteja varten. Lisää arvonlisäveron 24 %:n osuus seuraaviin verottomiin summiin:

a) 2 354,51 € _____ b) 1 098,64 € _____

c) 521,36 € _____ d) 28,59 € _____

e) 713,94 € _____ f) 4,00 € _____

2. Laske seuraavista summista veroton hinta.

a) 211,11 € _____ b) 381,25 € _____

c) 101,41 € _____ d) 52,31 € _____

e) 957,56 € _____ f) 10,00 € _____

3. Laske seuraavista teräksen verollisista ostohinnoista arvonlisäveron osuus.

a) 368,21 € _____

b) 701,39 € _____

c) 1 105,24 € _____

d) 49,23 € _____

e) 2 391,51 € _____

f) 565,00 € _____

4. Firmasi verollinen myynti oli 32 000 euroa. Samassa ajassa alv-vähennyskelpoiset ostot olivat 20 000 euroa. Kuinka paljon tilität valtiolle arvonlisäveroa? Alv = 24 %.

_____

_____

_____

5. Tanjan koneverstas myi asiakkaalle verollisena 45 153 euron arvosta tavaraa. Samassa ajassa alv-vähennyskelpoiset ostot olivat 34 456 euroa. Kuinka paljon Tanjan piti tilittää valtiolle arvonlisäveroa? Alv = 24 %.

_____

_____

_____

6. Kuinka monta prosenttia verollisessa tuotteen myyntihinnassa on lopulta arvonlisäveroa, kun alv-kanta on 24 %?

_____

_____

_____

7. Tmi Ville Valssaaja ilmoittaa kuukausittain maksamansa ja saamansa arvonlisäverot verottajalle. Eräänä kuukautena tilanne näytti seuraavalta. Hinnat ovat verollisia.

Ostot	Summa (€)
Teräslankaa	1 259,31
Peltiä	2 398,28
Kiinnitystarvikkeita	259,36
Työkaluja	159,32
Liikelounaat (ruoan alv 14 %)	127,57
Työveloitukset	8 000,00
Tarvikemyynti	3 529,82

a) Kuinka paljon Ville maksoi arvonlisäveroa ostoksistaan?

b) Kuinka paljon hän veloitti arvonlisäveroa asiakkailtaan?

c) Kuinka paljon hän maksoi verottajalle tässä kuussa arvonlisäveroa?

Korot ja lainat

Sekä yritykset että yksityishenkilöt joutuvat usein isoja hankintoja tehdessään lainaamaan rahaa pankilta. Koska rahan lainaamisen pitää olla kannattavaa liiketoimintaa pankeille, lainanottaja joutuu maksamaan enemmän rahaa takaisin kuin hän lainaa ottaessaan sai. Tätä rahan määrän lisäystä kutsutaan koroksi. Tässä luvussa opetellaan määrittämään koron suuruuksia eri tilanteissa – myös säästäessä. Korkoa maksetaan myös talletuksista, mutta sen määrä on yleensä huomattavasti pienempi kuin luotoissa.

Lainan korkoprosentti määräytyy lainanhakijan taloudellisen tilanteen, lainan kohteen ja yleisen maailmanmarkkinatilanteen pohjalta. Lainan korkoprosentti lasketaan siten, että ohjauskorkoon (esim. euribor tai pankin oma prime-korko) lisätään marginaali, joka riippuu pankin ja lainanottajan keskinäisestä sopimuksesta. Jos lainanottaja on varakas, hän saa lainan pienemmällä marginaalilla kuin köyhempi asiakas.

Laina- ja talletuskorkoprosentit määritellään yleensä vuosikorkona (lyhenne p.a.). Tarvetta on kahdelle kaavalle:

Korkoaika alle vuoden:

$\boldsymbol{R = Krt}$, jossa

R = korko

K = pääoma

r = korkokerroin desimaalimuodossa

t = korkoaika vuorokausissa $\left(\frac{\text{vrk}}{365}\right)$

Korkoaika useita korkokausia:

$\boldsymbol{K_n = K \cdot q^n}$, jossa

K_n on pääoma n:n korkokauden jälkeen

q = 1 + korkokerroin desimaalimuodossa

n = korkokausien lukumäärä

Esimerkki 7

Erehdyt ottamaan 20 päiväksi 600 euron pikavipin, jonka todellinen vuosikorko on 450 %. Määritä luoton koron määrä.

Ratkaisu:

Nyt korkoaika on alle vuoden, joten käytetään ensimmäistä kaavaa:

$$R = 600\ € \cdot 4{,}5 \cdot \frac{20}{365} = 147{,}945\ldots\ € \approx 147{,}95\ €.$$

Vastaus: Joudut maksamaan korkoa 147,95 euroa.

Esimerkki 8

Talletat korkeakorkoiselle tilille 5 000 euroa 10 vuodeksi. Korkoa luvataan 4,6 % vuodessa. Kuinka isoksi summa kasvaa?

Ratkaisu:

Kyse on koronkorosta. Jokaisen vuoden jälkeen korko pääomitetaan, jolloin korkoa alkaa kasvaa alkuperäisen pääoman lisäksi myös jo maksetulle korolle. Sijoitetaan arvot kaavaan:

$K_{10} = 5\,000\ € \cdot 1{,}046^{10} = 7\,839{,}472\ldots\ € \approx 7\,839{,}47\ €.$

Vastaus: Pääoma on 10 vuoden jälkeen 7 839,47 euroa.

Korkotulot ovat verottajan näkökulmasta pääomatuloa, josta maksetaan vuosittain 30 %:n lähdevero. Totuudenmukaisissa korkolaskuissa tämä pitää ottaa huomioon.

Esimerkki 9

Kesätöissä ollut metallialan opiskelija tallettaa 2 500 euroa vuodeksi tilille, jonka korko on 3,4 %. Kuinka iso pääoma on 5 vuoden kuluttua, kun 30 %:n lähdevero otetaan huomioon?

Ratkaisu:

Korjataan korko todelliseksi vähentämällä siitä 30 %.

100 % – 30 % = 70 % = 0,7

eli lasketaan 70 % 3,4 %:sta:

0,7 · 3,4 % = 2,38 %.

Lasketaan sitten normaalisti koronkoron kaavalla:

$K_5 = 2\,500\ € \cdot 1{,}0238^5 = 2\,812{,}002\ldots\ € \approx 2\,812{,}00\ €.$

Vastaus: Pääoma on 5 vuoden kuluttua 2 812,00 euroa.

Tehtäviä

1. Ota selvää, mikä on seuraavien korkojen tämänhetkinen taso:

a) 12 kuukauden euribor _____

b) 6 kuukauden euribor _____

c) jonkin pankin oma prime-korko. _____

2. Mikä on opiskelijalle paras tapa rahoittaa auto työmatkoja varten? Pohdi kaverisi kanssa ja esitä pohdintojenne tulokset luokalle.

_____

3. Pikavipin vuosikorko oli 340 %. Kuinka suureksi 5 000 euron pikavipin lainasumma kasvoi

a) 30 päivässä _____

b) 90 päivässä? _____

4. Otit 5 000 euron pankkilainan, jonka vuosikorko on 5,6 %. Kuinka suureksi lainasumma kasvoi

a) 30 päivässä _____

b) 90 päivässä? _____

Vertaa vastauksia edelliseen tehtävään.

5. Neuvottelit koneistusalan yrityksellesi 15 000 euron lainan konehankintaa varten. Lainaehdoissa luki, että luoton korko on 12 kk:n euribor + 2,2 %:n marginaali. Selvitä, mitkä luoton korkokustannukset olisivat yhden kuukauden aikana nykyhetkellä.

_____

6. Laskun suuruus oli alun perin 180,00 euroa. Maksat laskun 64 päivää myöhässä, ja vuotuinen viivästyskorko on 7,4 %. Kuinka paljon joudut maksamaan korkoa?

7. Talletat 1 200,00 euroa vuoden määräaikaistilille, jonka korko on 3,5 %. Kuinka paljon tililläsi on rahaa vuoden päästä? Lähdeveron suuruus on 30 %.

8. Tarvitset lainaa pientä hankintaa varten. Vertailet eri pankkien lainaehtoja ja päädyt seuraavaan ratkaisuun:

- lainan määrä 1 400,00 €
- laina-aika 1 v
- kiinteä korko 2,5 %
- lainan nostokulut 100,00 €
- lainan takaisinmaksu kahdessa erässä, veloitus 5,00 €/erä.

Kuinka suuriksi erät muodostuvat?

9. Sijoitat 1 000,00 euroa rahasto-osuuksiin, joiden tuotto-odotus on 10 % vuodessa. Jos nousu on tasaista, mikä osuutesi odotusarvo on

a) puolessa vuodessa

b) vuodessa

c) 10 vuodessa?

10. Sijoitat 4 000,00 euroa 5 vuodeksi pankkitilillesi. Pankki maksaa korkoa vuosittain 0,4 %, ja lähdeveroa peritään 30 %. Kuinka suureksi sijoituksesi kasvaa 5 vuodessa?

11. Sijoitat 4 000,00 euroa 5 vuodeksi rahastoon, jolle ennustetaan 7 %:n vuosittaista tuottoa.

a) Kuinka suureksi sijoituksesi kasvaa 5 vuodessa? Vertaa vastausta edelliseen tehtävään.

b) Päätät myydä rahasto-osuutesi ja ottaa voitot talteen. Kuinka paljon hyödyt nettona, kun tuotosta tulee maksaa pääomatuloveroa 30 %?

12. Määritä korkokanta, jonka mukaan 300,00 euron pääoma tuottaa 5 euroa korkoa 100 korkopäivässä. Ota myös lähdevero huomioon.

Indeksilaskenta

Tässä luvussa opit tulkitsemaan indeksejä. Indeksit kertovat jonkin tuotteen tai hyödykkeen suhteellisen hinnankehityksen verrattuna johonkin tarkasteluvuoteen. Tilastokeskus kerää lukuisia indeksejä eri elämänalueilta, muun muassa elinkustannus- ja rakennushinta-indeksejä. Kaikki indeksitaulukot ovat löydettävissä Tilastokeskuksen internetsivuilta.

Rahan reaaliarvo vaihtelee. Tämä asia on useimmiten hieman vaikea ymmärtää, sillä usein kuulee ihmisten vertaavan suoraan nykypäivän hintoja 20 vuoden takaisiin hintoihin. Tällaisessa vertailussa ei oteta lainkaan huomioon yleistä inflaatiota eli rahan arvon alenemista. Eri vuosien hintoja on siten aina verrattava indeksikorjattuina.

Indeksitaulukoissa vertailun ensimmäinen arvo saa aina vertailuluvun 100, joten indeksilukujen vertailu on helppoa. Näet muutoksen prosentteina silmänräpäyksessä.

Esimerkki 10

Rakennuskustannusindeksissä (2010 = 100) vuoden 2015 marraskuussa omakotitalon remontti sai indeksiluvun 108,8.

a) Mihin vuoteen kyseinen rakennuskustannusindeksi vertaa hintoja?

b) Kuinka monta prosenttia omakotitalon remontointi oli kallistunut marraskuussa 2015 suhteessa vuoteen 2010?

Ratkaisu:

a) Koska vuosi 2010 on saanut indeksiluvun 100, tämä indeksi vertaa hintoja vuoteen 2010.

b) Voimme lukea prosenttimuutoksen suoraan indekseistä. Remontointi on kallistunut 8,8 %.

Opetellaan seuraavaksi laskemaan tuotteiden hintojen reaaliarvoja. Käytetään kurssia 1 € = 5,95 mk.

Esimerkki 11

Vuonna 1974 uusi auto maksoi 15 000 markkaa. Muunna auton hinta nykyrahaksi elinkustannusindeksin avulla. Vuoden 2016 tasossa elinkustannusindeksi on 1911 ja vuoden 1974 indeksiluku on 333.

Ratkaisu:

Kerrotaan vanha hinta indeksiluvuista saadulla suhdeluvulla:

$$\frac{1\,911}{333} \cdot 15\,000 \text{ mk} = 86\,081{,}081\ldots \text{ mk}.$$

Muutetaan vielä markat euroiksi, jolloin saadaan

$$\frac{86\,081{,}081\ldots \text{ mk}}{5{,}95\ \frac{\text{mk}}{€}} = 14\,467{,}408\ldots € \approx 14\,500 €.$$

Käytännössä 1970-luvun alkupuolen markka on nykypäivän euro. Jos indeksilaskua taitamaton olisi muuttanut auton hinnan nykyrahaksi, hän olisi saanut vastaukseksi noin 2 500 euroa. Kovin halpoja olisivat olleet autot tuolloin!

Esimerkki 12

Tutustutaan hieman indeksitaulukon laadinnan perusteisiin. Oheisessa taulukossa ovat Reinon kuukausipalkat vuosittain eriteltyinä:

Vuosi	Palkka
2010	2 600 €
2011	2 700 €
2012	2 500 €
2013	2 900 €
2014	2 980 €

Laaditaan palkoista indeksitaulukko, jossa vuosi 2010 saa arvon 100.

Ratkaisu:

Indeksitaulukon laadinta on pohjimmiltaan prosenttilaskua. Verrataan kunkin vuoden palkkaa vuoden 2010 palkkaan prosentteina. Indeksiluku pyöristetään tässä tapauksessa täyteen prosenttiin.

Vuosi	Palkka	Suhde	Indeksi
2010	2 600 €	1	100
2011	2 700 €	$\frac{2\,700\ €}{2\,600\ €} = 1{,}038\ldots$	104
2012	2 500 €	$\frac{2\,500\ €}{2\,600\ €} = 0{,}961\ldots$	96
2013	2 900 €	$\frac{2\,900\ €}{2\,600\ €} = 1{,}115\ldots$	112
2014	2 980 €	$\frac{2\,980\ €}{2\,600\ €} = 1{,}146\ldots$	115

Tehtäviä

1. Mitä seuraavat termit tarkoittavat:

a) inflaatio

b) deflaatio

c) elinkustannusindeksi?

2. Vesa sai isältään vuonna 2001 lahjaksi 50 euroa. Kuinka iso summa se olisi vuonna 2016? Elinkustannusindeksin mukaan vuonna 2001 indeksi oli 1 539 ja vuonna 2016 se oli 1 906.

3. Rakennushintaindeksi oli vuoden 2001 tammikuussa 213,9 ja vuoden 2016 tammikuussa 302,6.

a) Perustasoinen omakotitalo maksaa nykyisin helposti 200 000 euroa. Kuinka paljon vastaavan arvoinen talo maksaisi vuoden 2001 rahana?

b) Elinkustannusindeksin vastaavat luvut tehtävän ajankohdille ovat 1 539 ja 1 906. Ovatko rakennuskustannukset kasvaneet nopeammin kuin muu hintataso?

4. Vuokrasopimuksessa voi olla ehto, jonka mukaan vuokra tarkistetaan vuosittain elinkustannusindeksin (EKI) mukaan. Olet solminut vuokrasopimuksen vuonna 2012 (EKI:1863), jolloin vuokran suuruudeksi sovittiin 570,00 €/kk. Mikä on vuokrataso

a) vuonna 2013, kun EKI:1890

b) vuonna 2014, kun EKI:1910?

5. Bensiinilitran (E92) hinta oli vuonna 1974 (EKI:333) vain 1,20 mk. Kuinka suuri litrahinta olisi vuoden 2016 tammikuussa (EKI:1906)? 1 € on noin 5,95 mk.

6. Ohuen teräsakselin metrihinta on vaihdellut paikallisessa rautakaupassa seuraavan taulukon mukaisesti.

Vuosi	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Metrihinta €	0,50	0,56	0,58	0,59	0,65	0,55

Täydennä alla olevaan taulukkoon indeksit kysytyiltä vuosilta, kun vuosi 2010:100.

Vuosi	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Indeksi	100					

7. Teollisen työn tuntihinta vaihtelee eri maissa voimakkaasti. Eurostatin tutkimuksen mukaan keskituntipalkat olivat eräissä maissa seuraavat:

Valtio	Suomi	Filippiinit	Saksa	Sveitsi	Yhdys-vallat	Ruotsi	Puola
Palkka (€/h)	37,00	2,00	38,00	58,00	34,00	42,00	8,00

a) Tee edellä mainituista palkoista indeksitaulukko, jossa suomalaisten keskipalkka saa arvon 100.

Valtio	Suomi	Filippiinit	Saksa	Sveitsi	Yhdys-vallat	Ruotsi	Puola
Indeksi-palkka							

b) Tee palkoista indeksitaulukko, jossa filippiiniläisten keskipalkka saa arvon 100.

Valtio	Suomi	Filippiinit	Saksa	Sveitsi	Yhdys-vallat	Ruotsi	Puola
Indeksi-palkka							

7

Tilastot

- Mitä tilastot ovat?
- Kuvaajatyypit
- Tilastolliset tunnusluvut
- Frekvenssitaulukot
- Oman tilastotutkimuksen tekeminen

Mitä tilastot ovat?

Tilastoja näet todennäköisesti päivittäin eri tiedotusvälineissä. Myös työelämässä käsitellään tilastoja. Tilastoja käytetään havainnollistettaessa tietoa. Niiden avulla voi hahmottaa paremmin ympäröivää maailmaa, ja ne auttavat myös päätöksenteossa. Jotta tilastoja voisi ymmärtää, on tärkeää tuntea peruskäsitteistö. Seuraavassa esitellään tärkeimmät käsitteet.

Tilasto perustuu siihen, että kerätään tutkittavasta asiasta havaintoja. Havainnot kerätään esimerkiksi haastattelemalla tai keräämällä tiedot havainnoimalla tai käyttämällä valmiita tietokantoja. Kerätty aineisto muokataan **taulukoiksi** tai erilaisiksi **graafisiksi esityksiksi**.

Usein aineistosta lasketaan myös erilaisia **tunnuslukuja** (esim. keskiarvo ja keskihajonta).

Tilastoksi kutsutaan havainnoista muodostunutta aineistoa. Havainnot voivat olla mitattuja arvoja tai esimerkiksi haastattelun vastauksia.

Tilastoja muodostettaessa valitaan tilastolle **perusjoukko.** Perusjoukolla tarkoitetaan sitä joukkoa, jonka ominaisuuksia tutkitaan. Lisäksi valitaan **tilastolliset muuttujat** eli tutkittavat ominaisuudet. Usein tilastoja varten otetaan selville myös vastaajan taustatiedot, joilla saattaa olla vaikutusta vastaajan mielipiteisiin, asenteisiin tai käyttäytymiseen. Tällöin puhutaan **taustamuuttujista**. Niitä voivat olla esimerkiksi ikä, sukupuoli tai tulot. Tilastoissa muuttujat saavat arvoja eli ne ovat vastauksia kysymyksiin tai havaintoihin.

Muuttujat voidaan jakaa määrällisiin ja laadullisiin. **Määrälliset muuttujat** saavat arvokseen lukuja ja **laadulliset muuttujat** sanallisia arvoja. Tilastotieteilijöitä usein kiinnostavat numeeriset muuttujat, koska luvuilla voidaan laskea erilaisia tunnuslukuja.

Tilasto tehdään havainnoimalla tai haastattelemalla **tilastoyksikköä** (eli perusjoukkoon kuuluvaa yksilöä). Lisäksi valitaan tapa, jolla tutkimus toteutetaan. **Kokonaistutkimuksessa** tutkitaan kaikki perusjoukkoon kuuluvat yksilöt ja **otantatutkimuksessa** vain osa perusjoukosta tutkitaan. Otantatutkimukseen valittavat yksilöt voidaan valita esimerkiksi arpomalla. Jos otantatutkimuksen tutkittavat yksilöt on valittu harkitusti, esimerkiksi tutkimuksen tekijän mieltymysten mukaan, kyseessä on **näytteenomainen tutkimus**.

Esimerkki 1

Opiskelijat toteuttavat gallupin, jossa he kysyvät satunnaisesti valituilta koulunsa opiskelijoilta, kuinka tyytyväisiä nämä ovat kouluruokaan. He haastattelevat koulunsa opiskelijoista noin puolet. Samalla he kysyvät opiskelijoiden lempiruokaa.

a) Onko tutkimus kokonais-, otanta- vai näytteenomainen tutkimus?
b) Mikä on tutkimuksen perusjoukko?
c) Mikä on tutkimuksen tilastoyksikkö?
d) Mitä tilastollisia muuttujia tutkimus sisältää?

Ratkaisu:

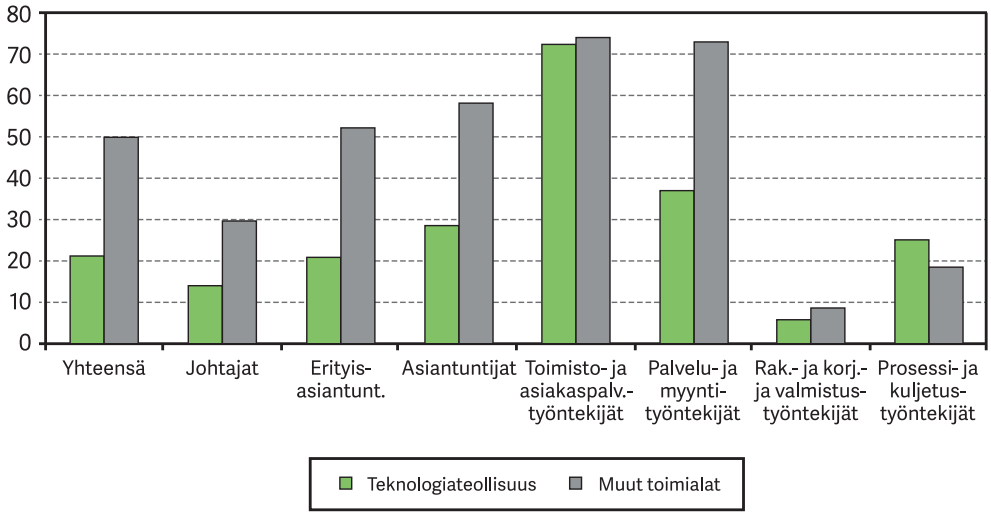
a) Tutkimus on otantatutkimus, koska kaikkia koulun opiskelijoita ei haastatella. Tutkimus ei ole näyte, koska opiskelijat on valittu satunnaisesti.
b) Tutkimuksen perusjoukko on koulun opiskelijat.
c) Tilastoyksikkö on yksi opiskelija.
d) Muuttujia ovat tyytyväisyys kouluruokaan ja lempiruoka.

Kuvaajatyypit

Kuvaajilla on tarkoitus havainnollistaa tietoa. Kuvaajatyyppi valitaan sen mukaan, mikä parhaiten kuvaa aineistoa. Seuraavaksi esitellään muutama yleisin kuvaajatyyppi.

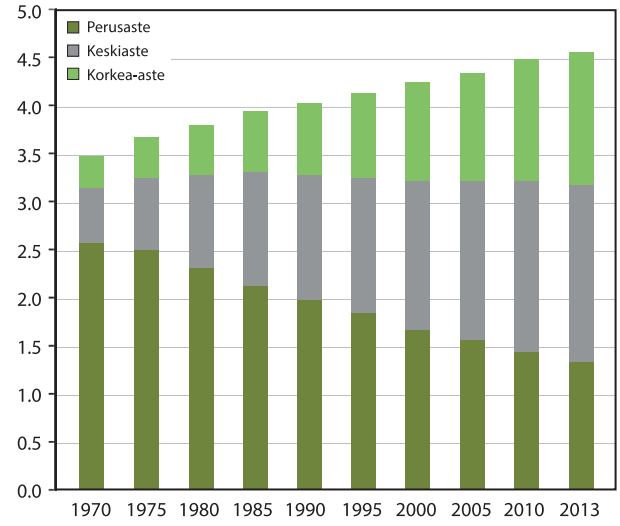
Pylväs- ja palkkidiagrammi

Pylväsdiagrammissa palkin pituus kuvaa havaintojen määrää. Pylväsdiagrammissa palkit ovat pystysuunnassa ja palkkidiagrammissa vaakasuunnassa. Jotta pylväsdiagrammi olisi mahdollisimman selkeä, pylväät kannattaa järjestää pituuden mukaan ja pylväiden pituuden tulee perustua todelliseen tasaväliseen asteikkoon.



Naisten osuus teknologiateollisuudessa ja muilla toimialoilla. (Mukailtu lähteestä Tilastokeskus, Työtaistelutilasto, 28.4.2015.)

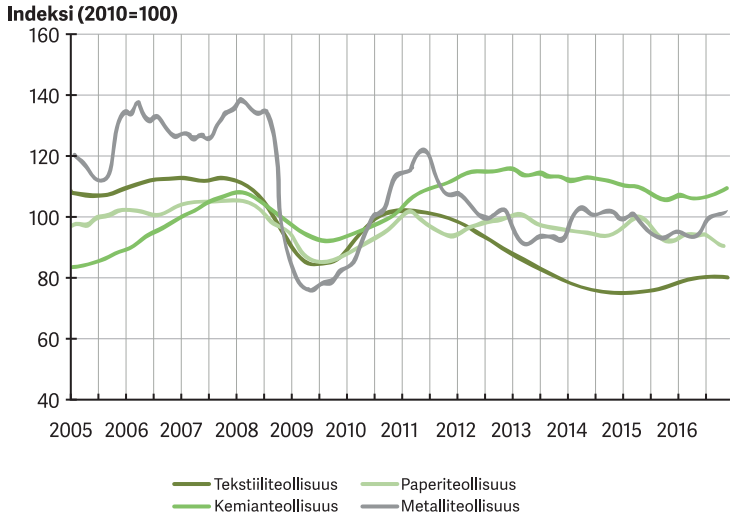
15 vuotta täyttänyt väestö koulutusasteen mukaan 1970–2013. (Lähde: Koulutus-tilastot 2014. Tilastokeskus.)



Viivadiagrammi

Viivadiagrammia käytetään, kun halutaan kuvata ilmiön vaihtelua tai kehityssuuntaa. Tyypillisesti viivadiagrammilla kuvataan tietyn ajan sisällä tapahtuvaa muutosta. Tällöin vaaka-akselina toimii aika. Viivadiagrammissa voi olla useampia viivoja, jos halutaan esimerkiksi havainnollistaa kahden muuttujan eroa.

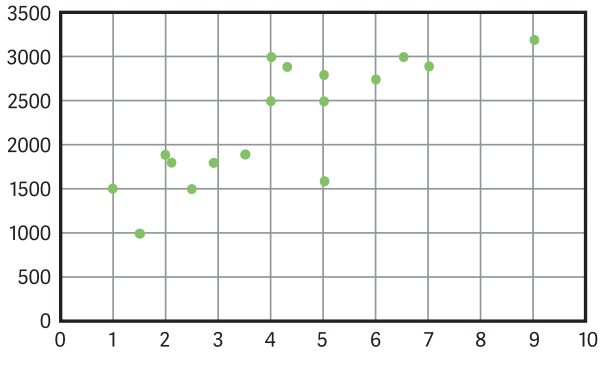
Teollisuuden uusien tilausten trendisarja toimialoittain. (Lähde: Teollisuuden uudet tilaukset, marraskuu 2016, Tilastokeskus.)



Hajontakuvio

Hajontakuviossa havaintoja kuvataan koordinaatistoon sijoitettuina pisteinä. Sen avulla voidaan saada tietoa muuttujien välisistä keskinäisistä riippuvuuksista.

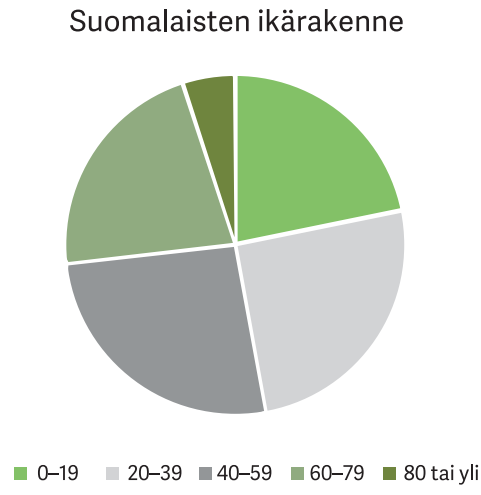
Esimerkki: Erään työntekijäjoukon kuukausipalkan ja työkokemuksen välinen riippuvuus.



Ympyrädiagrammi

Ympyrädiagrammia käytetään paljon. Se antaa nopean yleiskuvan jonkin ilmiön jakaantumisesta eri luokkiin. Tarkempi vertailu on kuitenkin hankalaa. Mitä enemmän sektoreita ympyrädiagrammiin muodostuu, sitä vaikeampi sitä on tulkita.

Mukailtu lähteestä Väestörekisterikeskus (vuoden 2015 joulukuu).



Tehtäviä

1. Lajittele seuraavat tutkimukset kokonais-, otanta- ja näytteenomaisiksi tutkimuksiksi.

a) Työturvakeskus kerää tiedon kaikista työtapaturmista Suomessa ja tekee niistä tilastoja. ●

b) Yritys tutkii asiakastyytyväisyyttä lähettämällä palautekyselyn kaikille asiakkailleen. ●

c) Iltapäivälehti tekee puhelinkyselyn satunnaisesti valitulle 1 000:lle suomalaiselle heidän puoluekannastaan. ●

d) Paikallislehti kysyy asukkaiden tyytyväisyyttä paikkakunnan palveluihin kymmeneltä ensimmäiseltä vastaantulevalta paikalliselta. ●

e) Työnantaja tekee työhyvinvointikyselyn kaikille työntekijöilleen. ●

f) Valtio järjestää presidentinvaalit. ●

- Kokonaistutkimus
- Otantatutkimus
- Näyte

2. Ovatko seuraavat muuttujat määrällisiä vai laadullisia?

a) ikä
b) koulutus
c) vuosittaiset tulot
d) asumismuoto
e) tyytyväisyys tuotteeseen
f) työkokemuksen määrä vuosina

- määrällinen muuttuja
- laadullinen muuttuja

3. Muuta seuraavat kysymykset sellaiseen muotoon, että vastaukseksi saadaan luku. Kirjoita kysymykset muutetussa muodossa vihkoosi.

a) Kuinka usein syöt opiskelijaravintolassa?

b) Kuinka paljon harrastat liikuntaa?

c) Miten paljon pidät tuotteesta X?

4. Työnantaja tekee kaikille työntekijöilleen kyselyn, jonka tarkoituksena on kartoittaa työntekijöiden tyytyväisyyttä työoloihin.

a) Mikä on perusjoukko? _____

b) Mikä on tilastoyksikkö? _____

c) Onko tutkimus kokonais- vai otantatutkimus? _____

d) Mitä muuttujia kysely voisi sisältää? _____

_____

e) Mitä taustamuuttujia kysely voisi sisältää? _____

_____

5. Alla olevat kuvaajat esittävät päivittäin tupakoivien 14–20-vuotiaiden poikien ja tyttöjen osuuksia prosentteina. Vastaa kuvaajien perusteella kysymyksiin.

a) Kuinka monta prosenttia peruskoululaisista pojista tupakoi vuonna 2013? _____

b) Kuinka monta prosenttia peruskoululaisista tytöistä tupakoi vuonna 2013? _____

c) Kuinka monta prosenttia ammatillisessa oppilaitoksessa opiskelevista pojista tupakoi vuonna 2015? _____

d) Kuinka monta prosenttia ammatillisessa oppilaitoksessa opiskelevista tytöistä tupakoi vuonna 2015? _____

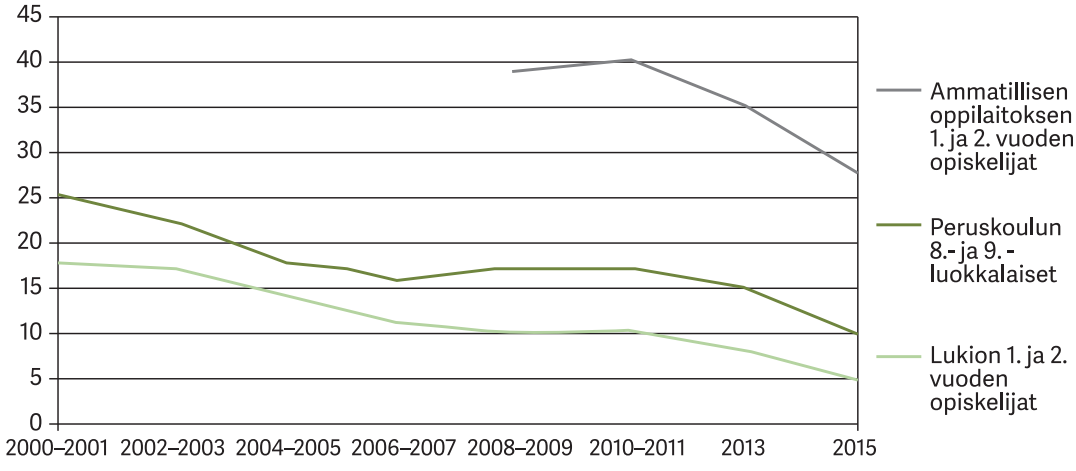
e) Mikä on ollut tutkimuksen perusjoukko? _____

f) Mitä muuttujia tutkimus sisältää? _____

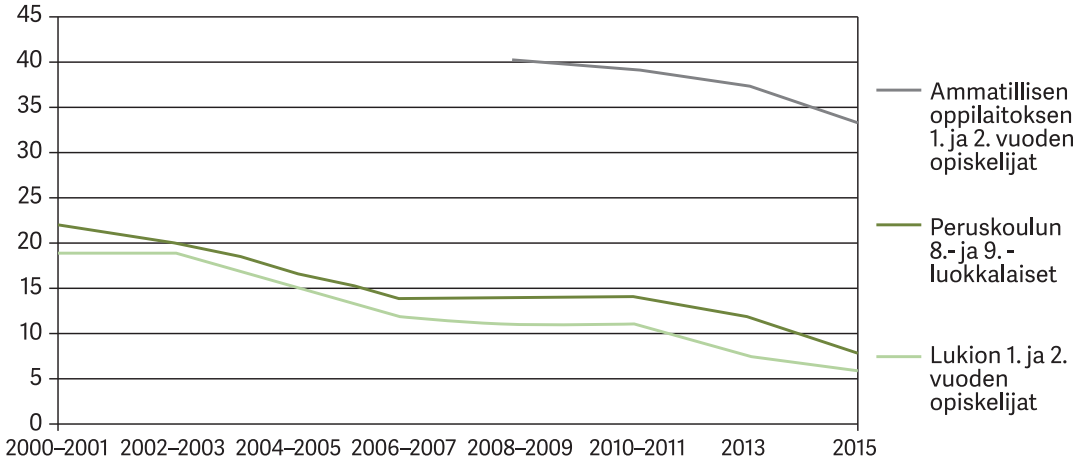
_____

_____

Pojat (%)



Tytöt (%)



Kuvaajat mukailtu lähteestä THL, Tupakkatilasto 2014.

6. Markku mittasi vuoden ajan painoaan. Hän mittasi painon aina kuukauden ensimmäisenä päivänä ja tulokset on taulukoitu alla olevaan taulukkoon. Piirrä taulukon pohjalta viivadiagrammi.

Pvm.	1.1.	1.2.	1.3.	1.4.	1.5.	1.6.	1.7.	1.8.	1.9.	1.10.	1.11.	1.12.
kg	98,0	99,0	97,5	96,5	96	97	98,5	99	100	98	97,5	96,5

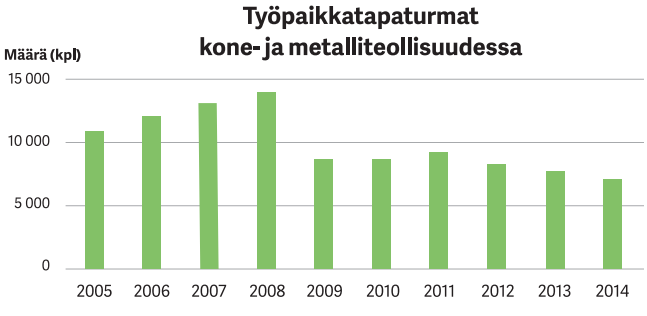
7. Oheisissa kuvaajissa esitetään metallialan työpaikkatapaturmien ja työmatkatapaturmien määrä eri vuosina.

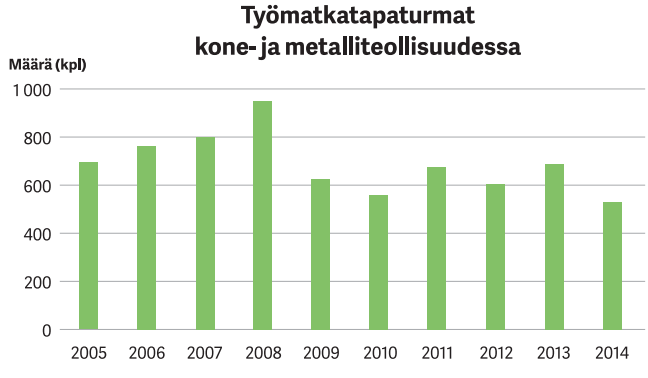
a) Milloin työpaikkatapaturmia on ollut eniten ja milloin vähiten?

b) Kuinka monta työtapaturmaa vähemmän tapahtui vuonna 2009 kuin vuonna 2008?

c) Milloin työmatkatapaturmia on ollut eniten ja milloin vähiten?

d) Arvioi, kuinka monta työpaikka- ja työmatkatapaturmaa tapahtui yhteensä vuonna 2013.





Kuvaajat mukailtu lähteestä Työturvallisuuskeskus.

8. Oheinen kuvaaja esittää suomalaisten asumisen kokonaisenergiankulutusta. Vastaa seuraaviin kysymyksiin kuvaajan perusteella.

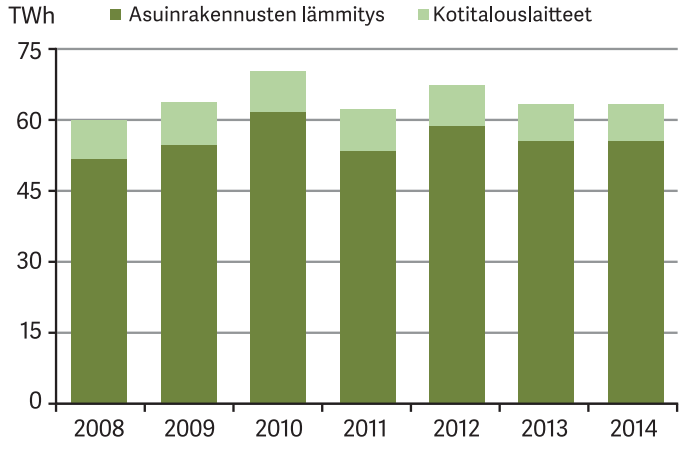
a) Kuinka monta terawattituntia (TWh) energiaa kului asuinrakennusten lämmitykseen vuonna 2008?

b) Kuinka monta terawattituntia energiaa kului kotitalouslaitteiden käyttöön vuonna 2014?

c) Minä vuonna asuinrakennusten lämmitykseen kului eniten energiaa tutkitulla aikavälillä?

d) Kuinka monta prosenttia kokonais-energiankulutuksesta meni lämmitykseen vuonna 2008?

e) Mikä on ollut tilaston perusjoukko?



Kuvaaja mukailtu lähteestä Tilastokeskus, Asumisen energiankulutus 2014.

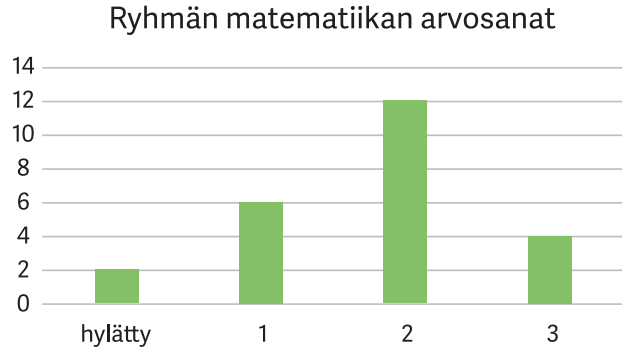
9. Erään hitsaustuotteen materiaalien ja energian kustannusjakauma on seuraavan taulukon mukainen. Piirrä taulukon perusteella vihkoosi materiaalien ja energian kustannusjakauman

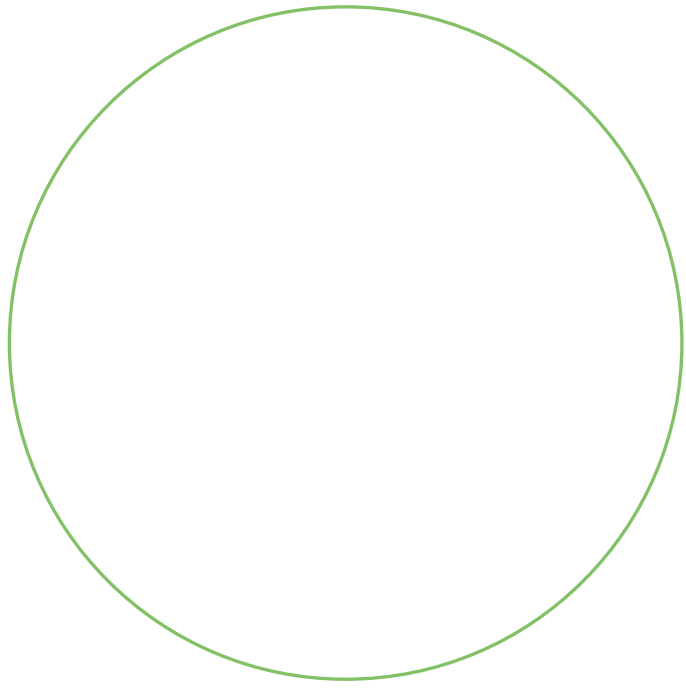
a) pylväsdiagrammi

b) ympyrädiagrammi. *(Vinkki: laske prosentti-osuudet kolmanteen sarakkeeseen.)*

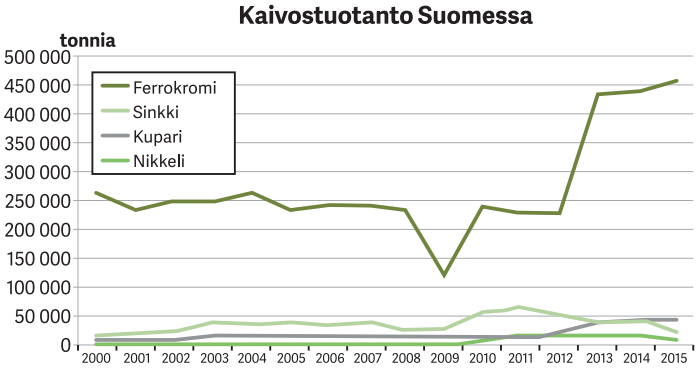
Osa-alue	Kustannukset (€/m)	Kustannukset (%)
Lisäaine	0,45	
Suojakaasu	0,10	
Kone	0,30	
Energia	0,05	
Yhteensä	0,90	

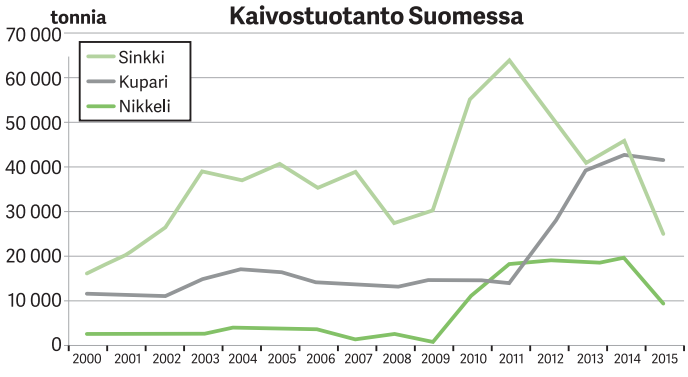
10. Piirrä seuraava pylväsdiagrammi ympyrädiagrammiksi.





11. Oheisissa kuvissa on esitetty neljän eri metallin kaivostuotantoa Suomessa.





Kuvaajat mukailtu lähteestä Geologian tutkimuskeskus.

a) Kuinka paljon vuonna 2014 tuotettiin kutakin metallilajia?

b) Mitä metallia tuotettiin vähiten vuonna 2015?

c) Piirrä vihkoosi pylväsdiagrammi ja ympyrädiagrammi vuoden 2015 tuotannosta. Kumpi näistä esittämistavoista olisi selkeämpi?

12. Erään kunnan asuntojen neliöhinnat vuosina 2005–2015 on taulukoitu oheiseen taulukkoon (pyöristettynä kymmenen euron tarkkuudella). Piirrä tietojen perusteella vihkoosi viivadiagrammi.

Vuosi	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Neliöhinta (€)	1 110	1 250	1 320	1 290	1 440	1 720	1 600	1 580	1 650	1 650	1 680

13. Arvioi omat kuukausittaiset menosi alla olevaan taulukkoon ja piirrä taulukon pohjalta vihkoosi

a) pylväsdiagrammi b) ympyrädiagrammi.
(*Vinkki: Ympyrädiagrammia piirrettäessä kannattaa muuttaa menot prosenteiksi.*)

Keksi itse tyhjiin kohtiin itsellesi sopivia kohteita.

Kohde	**Menot kuukaudessa (€)**
Asuminen (vuokra, sähköt ja vesi)	
Ruoka	
Puhelin- ja internetlaskut	
Harrastukset	
Yhteensä	

Tilastolliset tunnusluvut

Suomalaisten palkansaajien säännöllisten tulojen keskiarvo vuoden 2014 lopussa oli 3 538 €/kk. Tilastokeskus ilmoitti palkkojen mediaaniksi kuitenkin vain 3 135 €/kk. Miksi palkoista ilmoitettiin kaksi eri keskilukua? (Lähde: www.hs.fi/talous/a1440036036090.)

Jyväskylän ammattikorkeakoulussa vuonna 2015 julkistetun opinnäytetyön eräässä osiossa tutkittiin rappauksen tartuntakykyä betonipintaa vasten. Rapattu pinta kesti pinta-alaa kohden eräässä testissä keskimäärin 0,20 MPa:n suuruisen vedon. Keskihajonta oli 0,02 MPa. Miksi vetolujuudesta ilmoitettiin myös keskihajonta, ja mitä se tarkoittaa? (Lähde: www.theseus.fi/bitstream/handle/10024/88990/Polkki_Harri.pdf?sequence=1.)

Tilastoitua tietoa voidaan havainnollistaa monella eri tavalla. Tilastoista voidaan tehdä frekvenssitaulukko tai graafinen esitys (diagrammi) tai se voidaan esittää muutamien avainasemassa olevien lukujen avulla. Näistä luvuista tutuin lienee keskiarvo.

Keskiluvut: Moodi, mediaani ja keskiarvo

Keskiluvuilla pyritään kuvaamaan sitä muuttujan arvoa, jonka ympärille tilastoaineisto on jakautunut. Muuttujalla tarkoitetaan tutkittavaa asiaa, esimerkiksi kuukausipalkan suuruutta. Nykyään mediaanit ja keskiarvot määritetään käytännössä aina tilasto-ohjelmien avulla. Ymmärtämisen kannalta on kuitenkin tärkeää tietää, miten nämä tunnusluvut lasketaan.

Moodi (Mo) eli tyyppiarvo on tilastossa yleisimmin esiintyvä arvo. Moodi voidaan määrittää myös sellaisille muuttujille, jotka eivät ole numeroita. Moodeja voi olla useampikin.

Mediaani (Md) on suuruusjärjestykseen järjestetyn aineiston keskimmäinen arvo. Jos tilastoyksiköitä on parillinen määrä, mediaani on kahden keskimmäisen keskiarvo. Mediaani voidaan määrittää, jos aineisto voidaan jakaa suuruusjärjestykseen. Mediaani on erityisen käyttökelpoinen silloin, kun tilastoaineistossa on muutama arvo, joka poikkeaa huomattavasti muista arvoista.

Keskiarvo ($\overline{x}$) lasketaan lisäämällä yhteen muuttujien arvot ja jakamalla summa muuttujien lukumäärällä. Keskiarvo on kaikkein kuvaavin keskiluku silloin, kun tilasto-aineisto on jakautunut tasaisesti keskiarvon ympärille.

Esimerkki 2

Määritä

a) seuraavan luettelon moodi: kissa, kissa, koira, kani, jänis, ihminen

b) seuraavien pituuksien mediaani: 165 cm, 140 cm, 155 cm, 136 cm, 240 cm

c) seuraavien rahamäärien moodi, mediaani ja keskiarvo: 10 €, 5 €, 5 €, 10 €, 4 €, 400 €.

Ratkaisu:

a) Luettelossa yleisin arvo on"kissa", joten moodi on kissa.

b) Järjestetään aineisto suuruusjärjestykseen: 136, 140, 155, 165 ja 240. Näistä luvuista keskimmäisin on 155. Mediaani on siis 155 cm.

c) Moodit ovat 5 € ja 10 €, sillä ne olivat yleisimmät rahamäärät.

Mediaania varten järjestetään aineisto suuruusjärjestykseen: 4, 5, 5, 10, 10, 400.

Keskimmäiset luvut ovat 5 ja 10. Näin ollen mediaani on näiden keskiarvo:
Md = (5 + 10) : 2 = 7,50 €.

Keskiarvo saadaan laskulla $\overline{x}$ = (10 + 5 + 5+ 10 + 4 + 400) : 6 = 72,333... €.

Vastaus: Mo = 5 € ja 10 €, Md = 7,50 € ja $\overline{x} \approx$ 72,33 €

Tehtäviä

1. Määritä seuraavien pituuksien moodi, mediaani ja keskiarvo: 175 cm, 180 cm, 160 cm, 175 cm, 190 cm.

2. Suuri teräsalan yritys ilmoitti työntekijöille suunnatussa lehdessä edellisvuoden työtapaturmien johdosta loukkaantuneiden määrät kuukausittain.

tammikuu 2 kpl	helmikuu 3 kpl	maaliskuu 0 kpl	huhtikuu 1 kpl	toukokuu 22 kpl	kesäkuu 1 kpl
heinäkuu 0 kpl	elokuu 3 kpl	syyskuu 1 kpl	lokakuu 0 kpl	marraskuu 0 kpl	joulukuu 2 kpl

a) Edellisvuonna sattui erittäin harvinainen työtapaturma, jossa loukkaantui kerralla 20 ihmistä. Missä kuussa tämä tapahtui?

b) Määritä kuukauden aikana loukkaantuneiden henkilöiden määrien moodi. Perustele, miten määritit arvon.

c) Määritä kuukauden aikana loukkaantuneiden henkilöiden määrien mediaani. Perustele, miten määritit arvon.

d) Määritä kuukauden aikana loukkaantuneiden henkilöiden määrien keskiarvo.

e) Kumpi on parempi luku kuvaamaan kuukaudessa loukkaantuneiden määrää: keskiarvo vai mediaani? Perustele lyhyesti.

3. Eräs metallipaja teetti asiakkailleen asiakastyytyväisyyskyselyn. Kolmannessa kysymyksessä asiakkaita pyydettiin vastaamaan asteikolla 1–5 siihen, kuinka tyytyväisiä he ovat asennustöiden aikataulujen pitämiseen (1 = erittäin tyytymätön, 5 = erittäin tyytyväinen). Vastauksista koottiin oheinen taulukko:

Kuinka tyytyväinen olet aikataulun pitämiseen?	
Vastaus	Lukumäärä (kuinka moni valitsi tämän vaihtoehdon)
1	0
2	3
3	5
4	15
5	7

a) Määritä vastauksien moodi.

b) Kuinka monta henkilöä kyselyyn vastasi?

c) Määritä vastauksien mediaani. (*Vihje: Kirjoita auki, mitä kukin vastaaja on vastannut.*)

d) Määritä vastausten keskiarvo.

e) Yksi asiakas ei vastannut kyselyyn. Mitä tapahtuisi moodille, mediaanille ja keskiarvolle, jos puuttuva asiakas vastaisi olleensa erittäin tyytymätön? *(Nousisiko vai laskisiko keskiluku, vai pysyisikö se samana? Perustele lyhyesti!)*

4. Peltikattoja valmistava yritys teetti kymmenelle työntekijälleen kyselyn, jossa oli seuraavat kysymykset:

1. Missä roolissa haluaisit toimia tulevaisuudessa?	2. Kuinka tyytyväinen olet johtoportaan toimintaan viimeisen puolen vuoden aikana?	3. Jouluna jaamme yhteensä 5 000 euroa työntekijöillemme hyvän tuottavuuden vuoksi. Kuinka paljon tästä pitäisi sinulle jakaa antamasi työpanoksen perusteella?
Vaihtoehdot: a) myynti- ja markkinointi b) peltikattojen asennus c) tuotantolinjasto d) esimiesasema e) jotain muuta, mitä	Vaihtoehdot: a) en yhtään tyytyväinen b) jonkin verran tyytymätön c) jonkin verran tyytyväinen d) hyvin tyytyväinen e) erittäin tyytyväinen	Vastaus: _____ €

Vastauksista koottiin seuraava taulukko:

Vastaajan numero	Vastaus kysymykseen 1	Vastaus kysymykseen 2	Vastaus kysymykseen 3
1	a) myynti- ja markkinointi	e) erittäin tyytyväinen	600 €
2	d) esimiesasema	d) hyvin tyytyväinen	500 €
3	a) myynti- ja markkinointi	e) erittäin tyytyväinen	700 €
4	e) jotain muuta	e) erittäin tyytyväinen	650 €
5	e) jotain muuta	a) en yhtään tyytyväinen	5 000 €
6	b) peltikattojen asennus	c) jonkin verran tyytyväinen	100 €
7	c) tuotantolinjasto	e) erittäin tyytyväinen	800 €
8	b) peltikattojen asennus	c) jonkin verran tyytyväinen	500 €
9	a) myynti- ja markkinointi	b) jonkin verran tyytymätön	500 €
10	a) myynti- ja markkinointi	c) jonkin verran tyytyväinen	700 €

Määritä kaikille kolmelle muuttujalle moodi, mediaani ja keskiarvo, jos se on mahdollista. (*Vihje: Kysymykseen 2 tulee kaksi eri mediaania.*)

Hajontaluvut: vaihteluväli, vaihteluvälin pituus, keskipoikkeama ja keskihajonta

Hajontaluvuilla pyritään kuvaamaan sitä, miten muuttujan arvot vaihtelevat keskiluvun ympärillä. Pieni hajontaluku tarkoittaa sitä, että tilastoaineisto on ”pakkautunut” keskiluvun lähelle, jolloin voidaan ennustaa suhteellisen tarkasti tulevaisuutta vaikkapa keskiarvon avulla. Hajontaluvut lasketaan keskilukujen tapaan yleensä tilasto-ohjelmalla, mutta ymmärtämisen kannalta on kuitenkin tärkeää tietää, miten nämä tunnusluvut määritetään.

Vaihteluväli (W) on se väli, jolla muuttujan arvot vaihtelevat. Vaihteluvälin määrittämiseksi muuttujan arvot on voitava asettaa suuruusjärjestykseen.

Vaihteluvälin pituus (w) lasketaan vähentämällä suurin muuttujan arvo pienimmästä muuttujan arvosta. Vaihteluvälin määrittämiseksi muuttujien arvojen on oltava lukuja.

Keskipoikkeama (d) kertoo, kuinka kaukana yksittäinen havainto on keskimäärin keskiarvosta. Keskipoikkeamaa varten lasketaan ensin keskiarvo. Tämän jälkeen lasketaan jokaisen havainnon etäisyys keskiarvosta. Lopulta näistä etäisyyksistä otetaan keskiarvo. Keskipoikkeama on helposti ymmärrettävissä oleva hajontaluku. Valitettavasti sitä ei kuitenkaan juuri käytetä tilastollisissa analyyseissä.

Keskihajonta (sd) on kaikkein yleisimmin käytössä oleva hajontaa ilmaiseva luku. Sen laskeminen käsin on erittäin työlästä, jos tilastoituja lukuja on paljon. Tässä kirjassa keskihajonnan laskemiseen ei syvennytä, mutta kerrottakoon, että laskutapa pohjautuu keskipoikkeamaan ja että tuloksena on hieman keskipoikkeamaa suurempi luku. Jos havainto poikkeaa yli kahden keskihajonnan verran keskiarvosta, sanotaan, että havainto on merkittävästi poikkeava (harvinainen).

Esimerkki 3

Määritä mahdollisuuksien mukaan

a) rahamäärien vaihteluväli, vaihteluvälin pituus ja keskipoikkeama, kun rahamäärät olivat 10 €, 5 €, 9 €, 10 €, 4 € ja 40 €

b) aitauksessa olevien eläinten söpöys, kun aitauksessa oli kissa, koira ja hevonen.

Ratkaisu:

a) Pienin rahamäärä oli 4 €, suurin oli 40 €, joten **vaihteluväli W = [4 €, 40 €]**.

Vaihtoehtoinen merkintätapa olisi ”Rahamäärät vaihtelivat välillä 4 €–40 €”.

Vaihteluvälin pituus

40 € – 4 € = 36 €, joten **w = 36 €**.

Keskipoikkeama:

Keskiarvo on	(10 + 5 + 9 + 10 + 4 + 40) : 6 = 13
10 €:n poikkeama luvusta 13:	13 – 10 = 3
5 €:n poikkeama luvusta 13:	13 – 5 = 8
9 €:n poikkeama luvusta 13:	13 – 9 = 4
10 €:n poikkeama luvusta 13:	13 – 10 = 3
4 €:n poikkeama luvusta 13:	13 – 4 = 9
40 €:n poikkeama luvusta 13:	40 – 13 = 27
Poikkeamien keskiarvo on	(3 + 8 + 4 + 3 + 9 + 27) : 6 = 9

Keskipoikkeama d = 9 €.

b) Eläinten söpöyttä ei voida asettaa objektiiviseen suuruusjärjestykseen. Näin ollen hajontalukuja ei voida määrittää.

Tehtäviä

1. Määritä lukusarjan 1, 4, 5, 7, 1 vaihteluväli, vaihteluvälin pituus ja keskipoikkeama.

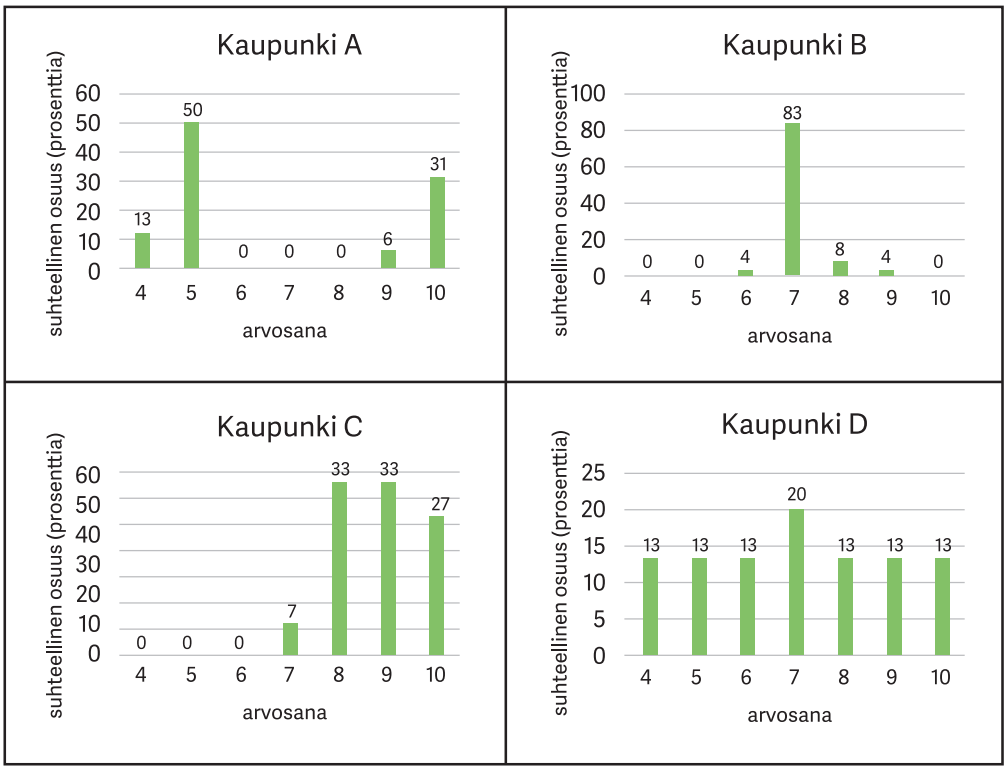
2. Metalliverstaalle ostettiin viisi paketillista halpatuotantomaissa tuotettuja ruuveja. Paketeissa piti etiketin mukaan olla 400 ruuvia, mutta ruuvien määrä saattoi vaihdella ohjeen mukaan paketeittain. Kesätyöntekijä laski ruuvit ja sai tulokseksi seuraavat ruuvimäärät: 370 kpl, 440 kpl, 405 kpl, 380 kpl, 435 kpl. Laske

a) ruuvimäärien keskiarvo ja mediaani

b) ruuvimäärien vaihteluväli, vaihteluvälin pituus ja keskipoikkeama.

c) Maahantuojan internetsivulla ilmoitettiin, että paketissa olevien ruuvimäärien keskiarvo on 400 ja keskihajonta on 29 ruuvia. Poikkesiko yksikään paketti tämän osalta merkittävästi maahantuojan ilmoittamasta keskiarvosta?

3. Suurella peltikattoja valmistavalla sekä niitä asentavalla yrityksellä on neljässä eri kaupungissa toimipiste. Yritys keräsi jokaisesta kaupungista toimipisteen asiakkailta palautteet. Asiakkaita pyydettiin antamaan yleisarvosana työn jäljestä asteikolla 4–10 tkaupungissa olevalle toimipisteelle. Tuloksista koottiin alla olevat pylväsdiagrammit.



a) Arvioi ilman laskemista jokaisen kaupungin keskiarvo.

b) Laske tai muulla tavoin perustelemalla määritä jokaisen kaupungin keskiarvo.

c) Missä kaupungissa arvosanojen mediaani oli paras? Perustele.

d) Missä kaupungissa arvosanojen moodi oli paras? Perustele.

e) Missä kaupungissa arvosanojen keskipoikkeama oli suurin? Perustele.

f) Missä kaupungissa työn jälki on ollut tasalaatuisinta? Perustele.

Frekvenssitaulukot

Sana frekvenssi tarkoittaa esiintymiskertojen lukumäärää. Tilastollisissa tutkimuksissa on usein kätevää taulukoida havaintoarvot frekvenssitaulukkoon, josta selviää muuttujan arvojen frekvenssit kertavilkaisulla. Tästä taulukosta on näppärä määrittää moodi ja laskea keskiarvo. Taulukko on tutkimuksen lukijallekin havainnollinen – mittaustulos on selvästi nähtävillä.

Esimerkki 4

Konepajalla työharjoittelussa ollut opiskelija päätti tutkia koneistajille tulevien lehtien määrää. Hän sai tulokseksi seuraavat havaintoarvot:

2 2 0 1 1 1 1 0 2 3 3 2 2 1 1 3 0

a) Tee aineistosta frekvenssitaulukko. Määritä aineistosta moodi, mediaani ja keskiarvo.

b) Määritä suhteellinen frekvenssi.

Ratkaisu:

a) Nyt muuttujana on lehtien kappalemäärä. Lasketaan kunkin arvon frekvenssi ja kootaan ne taulukkoon:

Lehtiä	Frekvenssi (f)
0	3
1	6
2	5
3	3

Moodi on siis 1 lehti, koska sen frekvenssi oli havaintoaineistossa suurin.

Mediaani on muuttujan keskimmäinen arvo. Mediaani on tässä tapauksessa 1 lehti, koska järjestettynä aineiston 9. arvo on keskimmäisin koko havaintoarvojen joukosta (17 kpl).

Keskiarvo lasketaan taulukosta siten, että kerrotaan ja lasketaan yhteen kunkin muuttujan arvon ja frekvenssin tulo ja jaetaan lopuksi havaintoarvojen yhteismäärällä:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3}{17} = 1{,}470\ldots \approx 1{,}5$$

b) Suhteellinen frekvenssi tarkoittaa kunkin luokan frekvenssin prosenttiosuutta kaikkien havaintoarvojen määrästä. Prosenttiosuus lasketaan tietysti jakamalla kunkin luokan frekvenssi havaintoarvojen määrällä:

Lehtiä	Frekvenssi (f)	Suhteellinen frekvenssi (f-%)
0	3	$\frac{3}{17} = 0{,}1764\ldots \approx 18\ \%$
1	6	$\frac{6}{17} = 0{,}3529\ldots \approx 35\ \%$
2	5	$\frac{5}{17} = 0{,}294\ldots \approx 29\ \%$
3	3	$\frac{3}{17} = 0{,}1764\ldots \approx 18\ \%$
Yhteensä	17	100 %

Joskus tutkimusaineisto on mielekkäintä esitellä luokitettuna. Tällöin keskiarvoja laskettaessa täytyy käyttää luokkakeskuksia, jotka saadaan todellisten ala- ja ylärajojen keskiarvona. Nämä rajat määräytyvät usein pyöristyssääntöjen mukaisesti. Ota kuitenkin huomioon, että luokitellun aineiston mukaan laskettu keskiarvo ei ole yhtä tarkka kuin absoluuttinen keskiarvo.

Esimerkki 5

Eräs yritys valmisti tilapäisvarastointiin sopivia halleja. Oheiseen taulukkoon on kerätty vuoden aikana valmistettujen hallien pinta-alat luokittain järjesteltynä.

Pinta-ala neliömetreinä	Frekvenssi (f)	Luokkakeskus
21–30	12	$\frac{20{,}5\ \text{m}^2 + 30{,}5\ \text{m}^2}{2} = 25{,}5\ \text{m}^2$
31–40	24	$\frac{30{,}5\ \text{m}^2 + 40{,}5\ \text{m}^2}{2} = 35{,}5\ \text{m}^2$
41–50	22	$\frac{40{,}5\ \text{m}^2 + 50{,}5\ \text{m}^2}{2} = 45{,}5\ \text{m}^2$
51–60	18	$\frac{50{,}5\ \text{m}^2 + 60{,}5\ \text{m}^2}{2} = 55{,}5\ \text{m}^2$
61–70	24	$\frac{60{,}5\ \text{m}^2 + 70{,}5\ \text{m}^2}{2} = 65{,}5\ \text{m}^2$

Määritä aineistoista moodi, mediaani ja keskimääräinen asuinpinta-ala.

Ratkaisu:

Moodiluokkana on pinta-alaltaan 31–40 m^2:n asunto, koska sen frekvenssi on suurin.

Mediaaniluokka on pinta-alaltaan 41–50 m^2:n asunto, koska koko aineiston havainto-arvojen (96 kpl) keskimmäinen arvo osuu tähän luokkaan.

Keskiarvo lasketaan luokkakeskusten avulla seuraavasti:

$$\bar{x} = \frac{12 \cdot 25{,}5\ \text{m}^2 + 24 \cdot 35{,}5\ \text{m}^2 + 22 \cdot 55{,}5\ \text{m}^2 + 18 \cdot 45{,}5\ \text{m}^2 + 24 \cdot 65{,}5\ \text{m}^2}{96}$$

$$\bar{x} = 46{,}47916\ldots\ \text{m}^2 \approx 46\ \text{m}^2.$$

Tehtäviä

1. Oheinen frekvenssitaulukko kuvaa oppilaitoksen opiskelijoiden sisarusten määrää. Määritä aineistosta mediaani, moodi ja keskiarvo.

Sisaruksia	f
0	12
1	9
2	16
3	12
4	6

2. Oheiseen frekvenssitaulukkoon on kerätty tiedot muuttujan k suhteen. Määritä aineistosta mediaani, moodi ja keskiarvo.

Muuttuja k	f
0	1
1	19
2	200
3	1
4	15
5	5

3. Oheiseen frekvenssitaulukkoon on kerätty tiedot koulun vaihto-oppilaiden äidinkielestä. Määritä mahdollisuuksien mukaan aineistosta mediaani, moodi ja keskiarvo.

Kieli	f
Englanti	4
Espanja	1
Ruotsi	2
Saksa	3
Viro	1

4. Pentti tutki työntekijöiden määrää metallialan yrityksissä. Hän kyseli 34 kohteesta. Havaintoarvot olivat seuraavat:

2 1 4 5 2 3 2 5 2 2 3 3 5 3 4 2 3 2 2 3 1 2 1 2 2 2 1 1 1 4 4 3 2 2

a) Järjestä havaintoarvot frekvenssitaulukkoon. Määritä myös suhteellinen frekvenssi.

b) Määritä aineistosta vaihteluväli, mediaani, moodi ja keskiarvo.

Työntekijöiden lukumäärä	*f*	*f*-%

5. Opiskelija selvitti yrityksissä tapahtuneiden työtapaturmien määrät kuukauden aikana. Tuloksena olivat seuraavat havaintoarvot:

1 0 0 0 2 1 0 0 0 1 1 1 1 2 2 3 0 1 0

a) Järjestä havaintoarvot frekvenssitaulukkoon. Määritä myös suhteellinen frekvenssi.

b) Määritä aineistosta vaihteluväli, mediaani, moodi ja keskiarvo.

Työtapaturmien määrä	*f*	*f*-%

6. Valmistuvien opiskelijoiden arvosanat jakautuivat eräänä keväänä seuraavasti:

Määritä aineistosta mediaani, moodi ja keskiarvo.

Arvosana	*f*-%
1	25,5
2	30
3	44,5

7. Oheiseen taulukkoon on kerätty erään teollisuushallialueen hallien pinta-aloja.

a) Laske luokkakeskukset taulukkoon.

Pinta-ala neliömetreinä	*f*	Luokkakeskus
10–29	3	
30–49	8	
50–69	15	
70–89	4	

b) Määritä mediaani, moodi ja keskiarvo.

8. a) Sepe tutki matematiikan opettajan vaatimuksesta luokkatovereidensa kesätyöpalkkoja. Hän oli kasannut tutkimusaineistonsa luokiteltuun frekvenssitaulukkoon:

Määritä tästä aineistosta moodi, keskipalkka ja mediaanipalkka.

Palkka euroina	*f*-%
1 000–1 999	25,5
2 000–2 999	30
3 000–3 999	44,5

b) Matematiikan opettaja ei ollut tyytyväinen tuloksen tarkkuuteen vaan vaati nähdä alkuperäisen aineiston. Laske aineistosta tarkka keski- ja mediaanipalkka ja vertaa tulosta a-kohtaan. Voiko tilastoilla valehdella?

Aineisto:

1 100 €	3 100 €	2 100 €	3 000 €	2 300 €	2 400 €
1 200 €	3 250 €	2 050 €	2 100 €	3 400 €	2 500 €

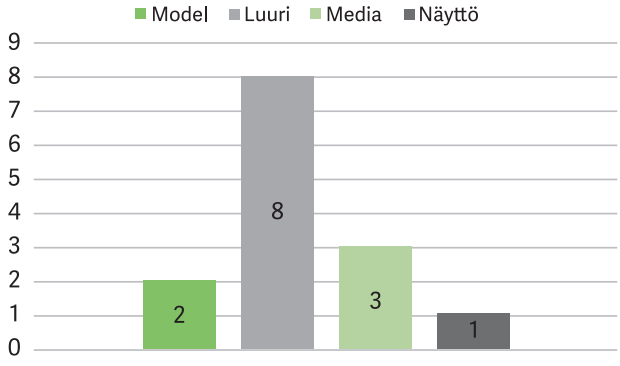
Oman tilastotutkimuksen tekeminen

Voit myös itse tehdä helposti pieniä tilastotutkimuksia.

Esimerkki 6

Otetaan tilastomuuttujaksi ryhmäsi opiskelijoiden matkapuhelimen merkki. Tehdään taulukko ja muodostetaan taulukkolaskentaohjelmalla graafinen esitys. Määritetään aineiston moodi.

Tulos voisi olla vaikka seuraavan kaltainen:



Puhelinmerkkien esiintyvyys ryhmässä X	
Puhelinmerkki	Frekvenssi
Model	2
Luuri	8
Media	3
Näyttö	1

Moodi on puhelinmerkki Luuri, koska sen frekvenssi on suurin. Tulos osoittaa varsin selvästi suosituimman merkin, mutta näin pienellä otoksella on kuitenkin oltava varovainen johtopäätöksiä tehtäessä. Tämän tutkimuksen perusteella on mahdotonta ennustaa koko koulun suosituinta puhelinmerkkiä.

Esimerkki 7

Tilastotutkimuksiin halutaan usein muuttuja, joka saa arvokseen numeerisia arvoja. Tällöin siitä voidaan määrittää myös erilaisia tunnuslukuja, kuten keskiarvo ja keskihajonta. Matkapuhelintutkimuksessa opiskelijoilta kysytään, kuinka monta matkapuhelinta heillä on ollut. Tulokseksi saadaan seuraava taulukko:

Matkapuhelinten lukumäärä	Frekvenssi
1	2
2	3
3	5
4	3
5	1

Tuloksista voidaan nyt laskea esimerkiksi Excelillä keskiarvo, moodi, mediaani ja keskihajonta. Tulokseksi saadaan

keskiarvo = 2,86 moodi = 3
mediaani = 3 keskihajonta = 1,12

Tulokset kertovat, että opiskelijoilla on ollut keskimäärin 3 puhelinta, ja keskihajonta kertoo, että tulosten hajonta on pientä.

Tehtäviä

1. Mikä on suosituin puhelimen väri ryhmässäsi? Tee vihkoosi frekvenssitaulukko ja graafinen esitys tuloksesta.

2. Miten ryhmäläisesi kulkevat jokapäiväiset koulumatkat (esim. mopo, polkupyörä, linja-auto jne.)? Tee vihkoosi frekvenssitaulukko ja graafinen esitys tuloksesta.

3. Kuinka usein oppilaitoksessasi tarjotaan kala-, liha- tai kasvisruokaa kahden viikon aikana? Tee vihkoosi taulukko ja graafinen esitys tuloksesta. Määritä moodi.

4. Ota selvää, kuinka monta sisarusta ryhmäläisilläsi on. Laadi vihkoosi vastauksista frekvenssitaulukko ja määritä moodi, mediaani ja keskiarvo.

5. Seuraa säätä kahden viikon ajan. Kuinka monena päivänä sataa? Tee vihkoosi taulukko ja graafinen esitys tuloksesta. Voiko tuloksista tehdä johtopäätöksiä meneillään olevan vuodenajan sadepäivien määrästä?

6. Seuraa rahankäyttöäsi kahden viikon ajan. Minä viikonpäivinä käytät eniten rahaa? Tee vihkoosi taulukko ja graafinen esitys tuloksesta.

7. Ota selvää, kuinka monta kertaa viikossa ryhmäläisesi harrastavat liikuntaa. Laadi vastauksista vihkoosi frekvenssitaulukko ja määritä moodi, mediaani ja keskiarvo.

8. Määritä edellisen tehtävän keskihajonta. Voit käyttää apunasi Excel-taulukko-ohjelmaa.

9. Vertaile eri asumismuotojen yleisyyttä. Kuinka paljon se poikkeaa siitä, miten ihmiset haluaisivat asua. Tee kysely mahdollisimman laajalla otannalla. Mitä johtopäätöksiä tuloksista voisi tehdä?

10. Tee asiakastöiden tilaajille palautelomake, jossa he voivat kertoa mielipiteensä tuotteesta ja palvelun laadusta. Kun palautteita on tullut tarpeeksi, tee kooste, josta käy ilmi, miten ryhmäsi oli onnistunut tuotteiden tekemisessä ja asiakaspalvelussa. Mikä onnistui hyvin? Entä missä olisi parannettavaa?